

DesignMat Uge 2

Taylorpolynomier og Taylors formel

Preben Alsholm

Forår 2009

Taylorpolynomier

- Definition af Taylorpolynomium
- Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
- Formlen for Taylorpolynomiet
- Eksempel: Eksponentialfunktionen
- Funktion givet ved simpel forskrift
- Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

- Lineariseringen
- Taylor's formel med Lagrange's restled
- Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
- Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
- Taylor's grænseformel
- Eksempel
- Store O-notationen
- Lille o-notationen

Definition af Taylorpolynomium

- ▶ Givet en funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og et udviklingspunkt $x_0 \in I$. Find et polynomium P_n af grad højst n , så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredje, \dots , n 'te afledede i punktet x_0 .

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II

Taylor's grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Definition af Taylorpolynomium

- ▶ Givet en funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og et udviklingspunkt $x_0 \in I$. Find et polynomium P_n af grad højst n , så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredje, \dots , n 'te afledede i punktet x_0 .
- ▶ P_n skal så opfylde ligningerne

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Definition af Taylorpolynomium

- ▶ Givet en funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og et udviklingspunkt $x_0 \in I$. Find et polynomium P_n af grad højst n , så f og P_n har samme nulte, første, anden, tredje, \dots , n 'te afledede i punktet x_0 .
- ▶ P_n skal så opfylde ligningerne

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

- ▶ Skriver vi P_n på formen

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

søger vi nu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formelen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

► Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

Taylorpolynomiet

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I

Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II

Taylor's grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

- fås, at $a_1 = f'(x_0)$. Da

$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

Taylorpolynomiet

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel ved Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

- Vi ser med det samme, at $a_0 = f(x_0)$. Da

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

- fås, at $a_1 = f'(x_0)$. Da

$$P''_n(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

- fås $a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$. Da

$$P'''_n(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

fås, at $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(x_0)$.

Taylorpolynomiet

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen

Funktion givet ved simpel forskrift

Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel ved Lagrange's restled

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

således at

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Formlen for Taylorpolynomiet

- Generelt fås altså

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

således at

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

idet vi definerer $0! = 1$ og $f^{(0)} = f$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet

Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Udledning af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶ $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n . Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$.

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af
Taylorpolynomium
Udledning af formlen
for Taylorpolynomiet
Formlen for
Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktioner

Funktion givet ved
simpler forskrift
Funktion givet ved
differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med
Lagrange's restled
Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶ $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n . Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- ▶ Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Exponentialfunktioner
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶ $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n . Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- ▶ Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- ▶ Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponentialfunktioner

Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶ $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n . Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- ▶ Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- ▶ Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

- ▶ Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Eksempel: Exponentialfunktioner

- ▶ $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt 0, orden n . Vi har jo $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$.
- ▶ Så $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ for alle $k \geq 0$.
- ▶ Hermed fås

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

- ▶ Altså

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

- ▶ Dette kan også skrives

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶ $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen
for Taylorpolynomiet

Formlen for

Taylorpolynomiet

Eksempel: Ekspone-
ntialfunktionen

**Funktion givet ved
simpel forskrift**

Funktion givet ved
differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med
Lagrange's restled

Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel I

Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel II

Taylor's grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶ $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶ $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- ▶ Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶ $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- ▶ Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.
- ▶ Hermed fås

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2
 \end{aligned}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved simpel forskrift

- ▶ $f(x) = x \arctan x$ med udviklingspunkt 1, orden 2.
- ▶ Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- ▶ Så $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$.
- ▶ Hermed fås

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

- ▶ Maple

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiering af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0.$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiering af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0.$$

- ▶ **Altså fås**

$$P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Funktion givet ved differentialligning

- ▶ Find det 2. Taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$ for løsningen til differentialligningen

$$x'(t) = \sin\left(t + x(t)^2\right) \text{ med } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ▶ Vi skal finde

$$P_2(t) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}x''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ i differentialligningen fås

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- ▶ Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x''(t) = \cos\left(t + x(t)^2\right) \cdot (1 + 2x(t)x'(t)).$$

- ▶ Ved indsættelse af $t = \frac{\pi}{2}$ heri fås

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cdot (1 + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right)x'\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0.$$

- ▶ Altså fås

$$P_2(t) = 0 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 = t - \frac{\pi}{2}$$

- ▶ som jo er det samme som det første Taylorpolynomium $P_1(t)$. Se Maple for $P_3(t)$.

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formelen

for Taylorpolynomiet

Formlen for

Taylorpolynomiet

Eksempel: Eksponen-

tialfunktionen

Funktion givet ved

simpler forskrift

Funktion givet ved

differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med

Lagrange's restled

Vurdering af fejlen

ved Taylors formel I

Vurdering af fejlen

ved Taylors formel II

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af
Taylorpolynomium
Udledning af formlen
for Taylorpolynomiet
Formlen for
Taylorpolynomiet
Eksempel: Ekspone-
ntialfunktionen
Funktion givet ved
simpler forskrift
Funktion givet ved
differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med
Lagrange's restled
Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶ f er *differentiable* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0 , så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen

Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶ f er *differentiabel* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ At f er differentiabel i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0) + a(x - x_0)$, når $|x - x_0|$ er lille.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶ f er *differentiable* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ At f er differentiable i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0) + a(x - x_0)$, når $|x - x_0|$ er lille.
- ▶ Funktionen $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ kaldes for *lineariseringen af f i x_0* .

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶ f er *differentiable* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ At f er differentiable i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0) + a(x - x_0)$, når $|x - x_0|$ er lille.
- ▶ Funktionen $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ kaldes for *lineariseringen* af f i x_0 .
- ▶ **Lineariseringen P_1 er det første Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 .**

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶ f er *differentiabel* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ At f er differentiabel i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0) + a(x - x_0)$, når $|x - x_0|$ er lille.
- ▶ Funktionen $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ kaldes for *lineariseringen* af f i x_0 .
- ▶ Lineariseringen P_1 er det første Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 .
- ▶ Grafen for P_1 er tangenten til grafen for f i $(x_0, f(x_0))$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Lineariseringen

- ▶ Definitionen på differentiability kan også formuleres således:
- ▶ f er *differentiabel* i x_0 med differentialkvotient a , hvis der findes en funktion ε defineret i et interval omkring 0, så

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h$$

og hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ At f er differentiabel i x_0 betyder altså, at $f(x)$ approksimeres godt ved $f(x_0) + a(x - x_0)$, når $|x - x_0|$ er lille.
- ▶ Funktionen $P_1(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ kaldes for *lineariseringen* af f i x_0 .
- ▶ Lineariseringen P_1 er det første Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt x_0 .
- ▶ Grafen for P_1 er tangenten til grafen for f i $(x_0, f(x_0))$.
- ▶ Hvor meget smider vi væk, når vi erstatte $f(x)$ med $P_1(x)$?

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Taylor's formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n ?

Taylor's formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af
Taylorpolynomium
Udledning af formlen
for Taylorpolynomiet
Formlen for
Taylorpolynomiet
Eksempel: Ekspone-
ntialfunktionen
Funktion givet ved
simpler forskrift
Funktion givet ved
differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
**Taylor's formel med
Lagrange's restled**
Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen
ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Taylor's formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n ?
- ▶ Taylor's formel: Lad f være $n + 1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x , så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Taylor's formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n ?
- ▶ Taylor's formel: Lad f være $n + 1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x , så

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

- ▶ Altså $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Taylors formel med Lagrange's restled

- ▶ Hvad er den fejl man begår ved at erstatte en funktion f med dens Taylorpolynomium P_n ?
- ▶ Taylors formel: Lad f være $n + 1$ gange differentiabel i intervallet I og lad $x_0 \in I$. For givet $x \in I$ findes et tal ξ mellem x_0 og x , så

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\
 &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}
 \end{aligned}$$

- ▶ Altså $f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} = P_n(x) + R_n(x)$.

- ▶ Vi beviser ikke sætningen.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har
- $$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Taylors formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen
for Taylorpolynomiet

Formlen for
Taylorpolynomiet

Eksempel: Ekspone-
ntialfunktionen

Funktion givet ved
simpler forskrift

Funktion givet ved
differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med
Lagrange's restled

**Vurdering af fejlen
ved Taylors formel I**

Vurdering af fejlen
ved Taylors formel II

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$.
- ▶ $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$.
- ▶ $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- ▶ Bestem n , så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$.
- ▶ $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- ▶ Bestem n , så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.
- ▶ I Taylors formel gælder så $|\xi| \leq 0.1$ og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel I

- ▶ Eksempel. $f(x) = e^x$, udviklingspunkt 0. Vi har $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$.
- ▶ $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Så

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

- ▶ Bestem n , så $|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-5}$ for alle $x \in [-0.1, 0.1]$.
- ▶ I Taylors formel gælder så $|\xi| \leq 0.1$ og dermed

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \end{aligned}$$

- ▶ Vi vælger nu n , så $\frac{2}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \leq 10^{-5}$. $n = 3$ er nok, idet $\frac{2}{4!} 10^{-4} = \frac{1}{12} 10^{-4} < 10^{-5}$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænsformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

Taylors formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af

Taylorpolynomium

Udledning af formlen
for Taylorpolynomiet

Formlen for

Taylorpolynomiet

Eksempel: Ekspone-
ntialfunktionen

Funktion givet ved
simpler forskrift

Funktion givet ved
differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen

Taylors formel med
Lagrange's restled

Vurdering af fejlen
ved Taylors formel I

**Vurdering af fejlen
ved Taylors formel II**

Taylors grænseformel

Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- ▶ Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- ▶ Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- ▶ Vi finder

$$f'(x) = (1+x) \cos(x^3)$$

$$f''(x) = \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3)$$

$$f'''(x) = -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3)$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- ▶ Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- ▶ Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- ▶ Vi finder

$$f'(x) = (1+x) \cos(x^3)$$

$$f''(x) = \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3)$$

$$f'''(x) = -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3)$$

- ▶ Heraf findes $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Vurdering af fejlen ved Taylors formel II

- Lad $f(x)$ for alle x være givet ved

$$f(x) = \int_0^x (1+t) \cos(t^3) dt$$

- Vurdér den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med dets 2. Taylorpolynomium $P_2(x)$ med udviklingspunkt 0, når $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- Vi finder

$$f'(x) = (1+x) \cos(x^3)$$

$$f''(x) = \cos(x^3) - (1+x) 3x^2 \sin(x^3)$$

$$f'''(x) = -6x(1+2x) \sin(x^3) - 9x^4(1+x) \cos(x^3)$$

- Heraf findes $P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.
- Vha. Maple findes, at $|f'''(x)| \leq 1.59$ for $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Altså fås

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6} |x|^3 \leq 1.59 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \simeq 0.033$$

Den faktiske maksimale fejl kan findes grafisk til 0.0008.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Taylor's grænseformel

- ▶ Lad $f \in C^n(I)$ og lad $x_0 \in I$. Der findes da en funktion ε defineret i et interval omkring 0 så for $x \in I$ gælder

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

- ▶ Lad $f \in C^n(I)$ og lad $x_0 \in I$. Der findes da en funktion ε defineret i et interval omkring 0 så for $x \in I$ gælder

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ **Bevis.** Taylor's formel giver et ξ mellem x og x_0 så $f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) (x - x_0)^n$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel ved Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II

Taylor's grænseformel II

Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

- ▶ Lad $f \in C^n(I)$ og lad $x_0 \in I$. Der findes da en funktion ε defineret i et interval omkring 0 så for $x \in I$ gælder

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ Bevis. Taylor's formel giver et ξ mellem x og x_0 så $f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$.

- ▶ Heraf fås

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \right) (x - x_0)^n.$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel ved Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II

Taylor's grænseformel

Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

- ▶ Lad $f \in C^n(I)$ og lad $x_0 \in I$. Der findes da en funktion ε defineret i et interval omkring 0 så for $x \in I$ gælder

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

hvor $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$.

- ▶ Bevis. Taylor's formel giver et ξ mellem x og x_0 så

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) (x - x_0)^n.$$

- ▶ Heraf fås

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \right) (x - x_0)^n.$$

- ▶ Men $f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow x_0$, da $f^{(n)}$ er kontinuert pr. antagelse.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel ved Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Eksempel

- ▶ Vi ønsker at bestemme grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^{2x} - 1 - 2x}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Eksempel

- ▶ Vi ønsker at bestemme grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^{2x} - 1 - 2x}$$

- ▶ Vi udnytter, at

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^2$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \varepsilon_2(x)x^2$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

- ▶ Vi ønsker at bestemme grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^{2x} - 1 - 2x}$$

- ▶ Vi udnytter, at

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^2$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \varepsilon_2(x)x^2$$

- ▶ Så for $x \rightarrow 0$ fås

$$\frac{\ln(1+x) - x}{e^{2x} - 1 - 2x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^2}{2x^2 + \varepsilon_2(x)x^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{2 + \varepsilon_2(x)} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4)`; som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, betyder der følgende:

Taylors formel

Preben Alsholm

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel

Store O-notationen

Lille o-notationen

Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen `taylor(sin(x),x=0,4)`; som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant K , så

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$; som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant K , så

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

- ▶ Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at der findes en konstant K , så

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

for alle x i et interval med a som indre punkt.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$; som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant K , så

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

- ▶ Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at der findes en konstant K , så

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

for alle x i et interval med a som indre punkt.

- ▶ Vi har eksempelvis: $\sin x = O(x)$, $\sin x = x + O(x^2)$, men også $\sin x = x + O(x^3)$ og den allerede viste.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
Taylors formel ved Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
Taylors grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Store O-notationen

- ▶ Når Maplekommandoen $\text{taylor}(\sin(x), x=0, 4)$; som resultat giver $x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$, betyder der følgende:
- ▶ Der findes en konstant K , så

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right| \leq Kx^4$$

for alle x i et interval med 0 som indre punkt.

- ▶ Generelt betyder $f(x) = O(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at der findes en konstant K , så

$$|f(x)| \leq K |u(x)|$$

for alle x i et interval med a som indre punkt.

- ▶ Vi har eksempelvis: $\sin x = O(x)$, $\sin x = x + O(x^2)$, men også $\sin x = x + O(x^3)$ og den allerede viste.
- ▶ I Taylor-sammenhæng kan $O((x - x_0)^n)$ tolkes som led af orden n og højere.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel ved Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder det samme som $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
Formlen for Taylorpolynomiet
Eksempel: Eksponentialfunktionen
Funktion givet ved simpel forskrift
Funktion givet ved differentialligning

Taylor's formel

Lineariseringen
Taylor's formel med Lagrange's restled
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel I
Vurdering af fejlen ved Taylor's formel II
Taylor's grænseformel
Eksempel
Store O-notationen
Lille o-notationen

Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder det samme som $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$.
- ▶ Med andre ord: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow 0$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formlen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
Lille o-notationen

Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder det samme som $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$.
- ▶ Med andre ord: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow 0$.

- ▶ Generelt betyder $f(x) = o(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow a$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder det samme som $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$.
- ▶ Med andre ord: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow 0$.

- ▶ Generelt betyder $f(x) = o(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow a$.

- ▶ Hvis $f(x) = O(x^4)$ for $x \rightarrow 0$ så gælder også $f(x) = o(x^3)$.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Eksponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen

Lille o-notationen

- ▶ Udsagnet $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder det samme som $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$.
- ▶ Med andre ord: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ betyder, at

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{x^3} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow 0$.

- ▶ Generelt betyder $f(x) = o(u(x))$ for $x \rightarrow a$, at

$$\frac{f(x)}{u(x)} \rightarrow 0$$

for $x \rightarrow a$.

- ▶ Hvis $f(x) = O(x^4)$ for $x \rightarrow 0$ så gælder også $f(x) = o(x^3)$.
- ▶ Den omvendte gælder ikke.

Taylorpolynomier

Definition af Taylorpolynomium
 Udledning af formelen for Taylorpolynomiet
 Formlen for Taylorpolynomiet
 Eksempel: Ekspponentialfunktionen
 Funktion givet ved simpel forskrift
 Funktion givet ved differentialligning

Taylors formel

Lineariseringen
 Taylors formel med Lagrange's restled
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel I
 Vurdering af fejlen ved Taylors formel II
 Taylors grænseformel
 Eksempel
 Store O-notationen
 Lille o-notationen