

DesignMat

Lineære ligningssystemer og matricer

Preben Alsholm

Uge 4 Forår 2009

Addition og multiplikation med skalar

- Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$

Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$
- ▶ Den associative regel for addition:
 $(A + B) + C = A + (B + C)$

Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$
- ▶ Den associative regel for addition:
 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ▶ Regler for multiplikation med skalar: $r(A + B) = rA + rB$, $(r + s)A = rA + sA$, $(rs)A = r(sA)$

Addition og multiplikation med skalar

- ▶ Addition af matricer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Multiplikation med skalar. Med A som før:

$$sA = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \end{bmatrix}$$

- ▶ Den kommutative regel for addition: $A + B = B + A$
- ▶ Den associative regel for addition:
 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ▶ Regler for multiplikation med skalar: $r(A + B) = rA + rB$, $(r + s)A = rA + sA$, $(rs)A = r(sA)$
- ▶ Maple.

Matrixmultiplikation I

- Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar**Matrixmultiplikation I**

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Matrixmultiplikation I

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

- ▶ Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

Matrixmultiplikation I

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

- ▶ Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

- ▶ Alternativ udregning af Ax : Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x .

Matrixmultiplikation I

- ▶ Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

- ▶ Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

- ▶ Alternativ udregning af Ax : Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x .
- ▶ **Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$.**

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

Matrixmultiplikation I

- Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

- Alternativ udregning af Ax : Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x .
- Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$.

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- Ækvivalent definition (der bruges i JE):

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Matrixmultiplikation I

- Lad A være en $m \times n$ -matrix og lad $x \in \mathbb{R}^n$. Skriv $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, hvor nu $a_i \in \mathbb{R}^m$. Så definerer vi produktet Ax ved

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

- Ligningssystemet med koefficientmatricen A og højresiden b kan nu skrives

$$Ax = b$$

- Alternativ udregning af Ax : Skalarprodukterne af rækkerne i A med søjlen x .
- Multiplikation af matricer: A er $m \times n$ og B er $n \times p$.

$$AB = A [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p]$$

- Ækvivalent definition (der bruges i JE):

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- Maple-illustration.

- ▶ Den associative regel for multiplikation:
 $(AB)C = A(BC)$

- ▶ Den associative regel for multiplikation:

$$(AB)C = A(BC)$$

- ▶ De distributive regler:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$$

- ▶ Den associative regel for multiplikation:

$$(AB)C = A(BC)$$

- ▶ De distributive regler:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$$

- ▶ Regning med skalar: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

- ▶ Den associative regel for multiplikation:
 $(AB)C = A(BC)$
- ▶ De distributive regler:
 $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$
- ▶ Regning med skalar: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- ▶ AB og BA . Hvornår eksisterer begge?

- ▶ Den associative regel for multiplikation:
 $(AB)C = A(BC)$
- ▶ De distributive regler:
 $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$
- ▶ Regning med skalar: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- ▶ AB og BA . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ **Hvornår giver spørgsmålet $AB = BA$ mening?**

- ▶ Den associative regel for multiplikation:
 $(AB)C = A(BC)$
- ▶ De distributive regler:
 $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$
- ▶ Regning med skalar: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- ▶ AB og BA . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet $AB = BA$ mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?

- ▶ Den associative regel for multiplikation:
 $(AB)C = A(BC)$
- ▶ De distributive regler:
 $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$
- ▶ Regning med skalar: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- ▶ AB og BA . Hvornår eksisterer begge?
- ▶ Hvornår giver spørgsmålet $AB = BA$ mening?
- ▶ Er det i så fald tilfældet?
- ▶ **Matricer kommuterer ikke generelt! Man skal altså regne med, at $AB \neq BA$. Se Maple for eksempler.**

- Enhedsmatricen af størrelse $n \times n$ betegnes med I_n :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Enhedsmatricen af størrelse $n \times n$ betegnes med I_n :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Hvis A er $m \times n$, så gælder $I_m A = A I_n = A$.

- ▶ Enhedsmatricen af størrelse $n \times n$ betegnes med I_n :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Hvis A er $m \times n$, så gælder $I_m A = A I_n = A$.
- ▶ Maple.

- Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Transponering

- Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

► $(A^T)^T = A$

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Transponering

- Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

► $(A^T)^T = A$

► $(A + B)^T = A^T + B^T$

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

- ▶ Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶ $(A^T)^T = A$
- ▶ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶ $(AB)^T = B^T A^T$ Bemærk rækkefølgen!

Transponering

- ▶ Den transponerede af matricen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ er matricen}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ▶ $(A^T)^T = A$
- ▶ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶ $(AB)^T = B^T A^T$ Bemærk rækkefølgen!
- ▶ $(rA)^T = rA^T$

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Ækvivalens af matricer og rang

- ▶ *Definition.* Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.

Ækvivalens af matricer og rang

- ▶ *Definition.* Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.
- ▶ Hvis $A \sim B$ så gælder åbenbart, at $\rho(A) = \rho(B)$.

- ▶ *Definition.* Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.
- ▶ Hvis $A \sim B$ så gælder åbenbart, at $\rho(A) = \rho(B)$.
- ▶ Det omvendte er galt: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har samme rang, men de er ikke ækvivalente!

Ækvivalens af matricer og rang

- ▶ *Definition.* Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.
- ▶ Hvis $A \sim B$ så gælder åbenbart, at $\rho(A) = \rho(B)$.
- ▶ Det omvendte er galt: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har samme rang, men de er ikke ækvivalente!
- ▶ Det kan vises, at $\rho(A^T) = \rho(A)$. (Det er ikke trivielt).

- ▶ *Definition.* Matricerne A og B siges at være ækvivalente ($A \sim B$), hvis den ene ved rækkeoperationer kan omdannes til den anden.
- ▶ Hvis $A \sim B$ så gælder åbenbart, at $\rho(A) = \rho(B)$.
- ▶ Det omvendte er galt: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ har samme rang, men de er ikke ækvivalente!
- ▶ Det kan vises, at $\rho(A^T) = \rho(A)$. (Det er ikke trivielt).
- ▶ **Note:** Kan vises ved at vise, at $N(A^T)^\perp = R(A)$. Dette betyder, at søjlerummet er mængden af de vektorer, der står vinkelret på nulrummet for A^T .

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.

Matrixalgebra

Addition og
multiplikation med
skalar

Matrixmultiplikation I

Matrixmultiplikation II

Enhedsmatricen

Transponering

Ækvivalens af
matricer og rang

Matrixligninger

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- ▶ De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- ▶ De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .
- ▶ **Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed $T = [A \mid B]$.**

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- ▶ De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .
- ▶ Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed $T = [A \mid B]$.
- ▶ $AX = B$ har ingen løsning, når $\rho(T) > \rho(A)$.

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- ▶ De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .
- ▶ Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed $T = [A \ | \ B]$.
- ▶ $AX = B$ har ingen løsning, når $\rho(T) > \rho(A)$.
- ▶ $AX = B$ har netop én løsning, når $\rho(T) = \rho(A) = n$.

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- ▶ De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .
- ▶ Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed
 $T = [A \mid B]$.
- ▶ $AX = B$ har ingen løsning, når $\rho(T) > \rho(A)$.
- ▶ $AX = B$ har netop én løsning, når $\rho(T) = \rho(A) = n$.
- ▶ $AX = B$ har uendeligt mange løsninger, når $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$. I alt er der $(n - \rho)p$ frie parametre.

Matrixligninger

- ▶ Lad A være en $m \times n$ matrix og B en $m \times p$ matrix. Vi vil løse ligningen $AX = B$.
- ▶ Her bliver den ubekendte matrix X nødvendigvis en $n \times p$ matrix.
- ▶ Skriv $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ og $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$
- ▶ Så har vi $[Ax_1 \ Ax_2 \ \dots \ Ax_n] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$.
- ▶ Vi skal altså løse systemerne
 $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p$.
- ▶ De p systemer har samme koefficientmatrix, men p forskellige højresider, der stillet sammen udgør B .
- ▶ Totalmatricen indeholdende alle højresiderne er dermed
 $T = [A \mid B]$.
- ▶ $AX = B$ har ingen løsning, når $\rho(T) > \rho(A)$.
- ▶ $AX = B$ har netop én løsning, når $\rho(T) = \rho(A) = n$.
- ▶ $AX = B$ har uendeligt mange løsninger, når $\rho(T) = \rho(A) = \rho < n$. I alt er der $(n - \rho)p$ frie parametre.
- ▶ **Maple.**