DesignMat
Kvadratiske matricer, invers matrix, determinant

Preben Alsholm

Uge 5 Forår 2009

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes C en invers til A.

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så

$$AC = CA = I$$

  I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så

$$AC = CA = I$$

  I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så
$$AC = CA = I$$
I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.
- Hvis A har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at $AC_1 = I$ og $C_2A = I$. Så gælder
$$C_2 = C_2 I = C_2 (AC_1) = (C_2A) C_1 = IC_1 = C_1$$

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så

$$AC = CA = I$$

  I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.
- Hvis A har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at $AC_1 = I$ og $C_2 A = I$. Så gælder

$$C_2 = C_2 I = C_2 (AC_1) = (C_2 A) C_1 = IC_1 = C_1$$

- Den inverse af A betegnes med A^{-1}.

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.
- Hvis A har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at $AC_1 = I$ og $C_2A = I$. Så gælder

$$C_2 = C_2I = C_2\left(AC_1\right) = \left(C_2A\right)C_1 = IC_1 = C_1$$

- Den inverse af A betegnes med A^{-1}.
- Sætning. *Matricen A er invertibel hvis og kun hvis A er regulær, dvs. har fuld rang. Matricen A^{-1} er entydigt bestemt som løsningen C til $AC = I$.*

Invers matrix I

- *Definition*. En $n \times n$-matrix A siges at være invertibel, hvis der findes en $n \times n$-matrix C, så

$$AC = CA = I$$

I bekræftende fald kaldes C en invers til A.
- Hvis kun $AC = I$, siger man, at A har en højreinvers C.
- Hvis kun $CA = I$, siger man, at A har en venstreinvers C.
- Hvis A har en invers, er den entydigt bestemt: Antag, at $AC_1 = I$ og $C_2 A = I$. Så gælder

$$C_2 = C_2 I = C_2 (AC_1) = (C_2 A) C_1 = IC_1 = C_1$$

- Den inverse af A betegnes med A^{-1}.
- Sætning. *Matricen A er invertibel hvis og kun hvis A er regulær, dvs. har fuld rang. Matricen A^{-1} er entydigt bestemt som løsningen C til $AC = I$.*
- Maple.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \to [I \mid C]$.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \longrightarrow [I \mid C]$.
- Hermed har vi fundet en højreinvers C.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \to [I \mid C]$.
- Hermed har vi fundet en højreinvers C.
- Men så fås $A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$ (nulmatricen).

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \rightarrow [I \mid C]$.
- Hermed har vi fundet en højreinvers C.
- Men så fås $A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$ (nulmatricen).
- Men af $A(CA - I) = 0$ fås $CA - I = 0$ da $AX = 0$ kun har nulløsningen, når A har fuld rang. Altså $CA = I$.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \to [I \mid C]$.
- Hermed har vi fundet en højreinvers C.
- Men så fås $A\,(CA - I) = ACA - A = (AC)\,A - A = A - A = 0$ (nulmatricen).
- Men af $A\,(CA - I) = 0$ fås $CA - I = 0$ da $AX = 0$ kun har nulløsningen, når A har fuld rang. Altså $CA = I$.
- Konklusion: Når A har en højreinvers, så er denne også venstreinvers, og dermed er den invers, altså A^{-1}.

Invers matrix II, Algoritmen

- Vi vil bestemme C, så $AC = I$.
- Totalmatricen dermed $[A \mid I]$.
- $AC = I$ har en løsning C, netop når A har fuld rang, og C findes ved Gauss-Jordan $[A \mid I] \to [I \mid C]$.
- Hermed har vi fundet en højreinvers C.
- Men så fås $A(CA - I) = ACA - A = (AC)A - A = A - A = 0$ (nulmatricen).
- Men af $A(CA - I) = 0$ fås $CA - I = 0$ da $AX = 0$ kun har nulløsningen, når A har fuld rang. Altså $CA = I$.
- Konklusion: Når A har en højreinvers, så er denne også venstreinvers, og dermed er den invers, altså A^{-1}.
- Maple.

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Bevis:

$$\begin{aligned} (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \end{aligned}$$

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Bevis:

$$\begin{aligned}(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

- Hvis A er invertibel, så er A^T invertibel og $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Bevis:

$$\begin{aligned}(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

- Hvis A er invertibel, så er A^T invertibel og $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
- Bevis: $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$

Invers matrix II

- Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel og $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Hvis A og B begge er invertible, så er AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Bevis:

$$\begin{aligned} (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \end{aligned}$$

- Hvis A er invertibel, så er A^T invertibel og $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
- Bevis: $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$
- og $\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$.

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning
$$P : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$
kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.
- En permutation af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n)$.

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.
- En permutation af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n)$.
- Eksempelvis er $3, 5, 1, 2, 4$ en permutation af $1, 2, 3, 4, 5$. Her er funktionen P givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning

$$P : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.

- En permutation af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n)$.
- Eksempelvis er $3, 5, 1, 2, 4$ en permutation af $1, 2, 3, 4, 5$. Her er funktionen P givet ved

$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$

- Den omvendte funktion P^{-1} er permutationen $3, 4, 1, 5, 2$.

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning
$$P : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$
kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.
- En permutation af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n)$.
- Eksempelvis er $3, 5, 1, 2, 4$ en permutation af $1, 2, 3, 4, 5$. Her er funktionen P givet ved
$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$
- Den omvendte funktion P^{-1} er permutationen $3, 4, 1, 5, 2$.
- Med S_n betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$.

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning
$$P:\{1,2,3,\ldots,n\}\to\{1,2,3,\ldots,n\}$$
kaldes en *permutation* af tallene $1,2,3,\ldots,n$.
- En permutation af tallene $1,2,3,\ldots,n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1),P(2),P(3),\ldots,P(n)$.
- Eksempelvis er $3,5,1,2,4$ en permutation af $1,2,3,4,5$. Her er funktionen P givet ved
$$P(1)=3, P(2)=5, P(3)=1, P(4)=2, P(5)=4$$
- Den omvendte funktion P^{-1} er permutationen $3,4,1,5,2$.
- Med S_n betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene $1,2,3,\ldots,n$.
- $S_2=\{(1,2),(2,1)\}$. $S_3=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

Permutationer I

- Definition. En bijektiv afbildning
$$P : \{1, 2, 3, \dots, n\} \to \{1, 2, 3, \dots, n\}$$
kaldes en *permutation* af tallene $1, 2, 3, \dots, n$.
- En permutation af tallene $1, 2, 3, \dots, n$ kan opfattes som en omordning af tallene til ordenen $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n)$.
- Eksempelvis er $3, 5, 1, 2, 4$ en permutation af $1, 2, 3, 4, 5$. Her er funktionen P givet ved
$$P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 1, P(4) = 2, P(5) = 4$$
- Den omvendte funktion P^{-1} er permutationen $3, 4, 1, 5, 2$.
- Med S_n betegner vi mængden af samtlige permutationer af tallene $1, 2, 3, \dots, n$.
- $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$.
- Der er $n!$ medlemmer i S_n.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen $3, 5, 1, 2, 4$ indeholder inversionerne $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$. Altså 5 inversioner.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen $3, 5, 1, 2, 4$ indeholder inversionerne $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$. Altså 5 inversioner.
- Antallet af inversioner i en permutation betegnes $I(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vi har altså $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen $3, 5, 1, 2, 4$ indeholder inversionerne $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$. Altså 5 inversioner.
- Antallet af inversioner i en permutation betegnes $I(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vi har altså $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$.
- En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen $3, 5, 1, 2, 4$ indeholder inversionerne $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$. Altså 5 inversioner.
- Antallet af inversioner i en permutation betegnes $I(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vi har altså $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$.
- En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- Fortegnet $\operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$ for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og -1, hvis den er ulige.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen 3, 5, 1, 2, 4 indeholder inversionerne $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$. Altså 5 inversioner.
- Antallet af inversioner i en permutation betegnes $I(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vi har altså $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$.
- En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- Fortegnet $\mathrm{sgn}(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$ for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og -1, hvis den er ulige.
- Lemma 3.1. Ved ombytning af to elementer i en permutation skifter denne fortegn.

Permutationer II

- Lad $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ være en permutation af $1, 2, 3, \ldots, n$. Hvis $p < q$, men $j_p > j_q$, så kaldes talparret j_p, j_q en *inversion* indenfor permutationen.
- Permutationen $3, 5, 1, 2, 4$ indeholder inversionerne $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4)$. Altså 5 inversioner.
- Antallet af inversioner i en permutation betegnes $I(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vi har altså $I(3, 5, 1, 2, 4) = 5$.
- En permutation kaldes *lige* eller *ulige*, hvis inversionsantallet er lige eller ulige, henholdsvis.
- Fortegnet $\operatorname{sgn}(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$ for en permutation defineres som 1, hvis permutationen er lige, og -1, hvis den er ulige.
- Lemma 3.1. Ved ombytning af to elementer i en permutation skifter denne fortegn.
- Eksempelvis er $\operatorname{sgn}(3, 5, 1, 2, 4) = -1$, men $\operatorname{sgn}(3, 2, 1, 5, 4) = 1$.

Definition af determinant

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definition af determinant

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinanten af A defineres ved en sum over alle permutationer i S_n:

$$\det A = \sum_{S_n} sgn\left(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n\right) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Definition af determinant

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinanten af A defineres ved en sum over alle permutationer i S_n:

$$\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

- Determinanten af en 2×2-matrix A findes dermed til

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = sgn\,(1,2)\, a_{11} a_{22} + sgn\,(2,1)\, a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

Definition af determinant

- Lad $n \times n$-matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinanten af A defineres ved en sum over alle permutationer i S_n:

$$\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

- Determinanten af en 2×2-matrix A findes dermed til

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = sgn\,(1,2)\, a_{11} a_{22} + sgn\,(2,1)\, a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

- Heldigvis det vi kender fra gymnasiet.

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til
- $sgn\,(1,2,3)\,a_{11}a_{22}a_{33} + sgn\,(1,3,2)\,a_{11}a_{23}a_{32}$ $+ sgn\,(2,1,3)\,a_{12}a_{21}a_{33} + sgn\,(2,3,1)\,a_{12}a_{23}a_{31}$ $+ sgn\,(3,1,2)\,a_{13}a_{21}a_{32} + sgn\,(3,2,1)\,a_{13}a_{22}a_{31}$

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til
- $sgn\,(1,2,3)\, a_{11}a_{22}a_{33} + sgn\,(1,3,2)\, a_{11}a_{23}a_{32}$
  $+ sgn\,(2,1,3)\, a_{12}a_{21}a_{33} + sgn\,(2,3,1)\, a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+ sgn\,(3,1,2)\, a_{13}a_{21}a_{32} + sgn\,(3,2,1)\, a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
  $- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til
- $sgn(1,2,3)\, a_{11}a_{22}a_{33} + sgn(1,3,2)\, a_{11}a_{23}a_{32}$
  $+ sgn(2,1,3)\, a_{12}a_{21}a_{33} + sgn(2,3,1)\, a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+ sgn(3,1,2)\, a_{13}a_{21}a_{32} + sgn(3,2,1)\, a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
  $- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til
- $sgn\,(1,2,3)\, a_{11}a_{22}a_{33} + sgn\,(1,3,2)\, a_{11}a_{23}a_{32}$
  $+ sgn\,(2,1,3)\, a_{12}a_{21}a_{33} + sgn\,(2,3,1)\, a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+ sgn\,(3,1,2)\, a_{13}a_{21}a_{32} + sgn\,(3,2,1)\, a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
  $- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$
  $(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$
- Sarrus' regel.

Determinanter: Eksempler

- Eksempel. $S_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
- Med $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ fås determinanten $|A|$ til
- $sgn(1,2,3)\, a_{11}a_{22}a_{33} + sgn(1,3,2)\, a_{11}a_{23}a_{32}$
  $+sgn(2,1,3)\, a_{12}a_{21}a_{33} + sgn(2,3,1)\, a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+sgn(3,1,2)\, a_{13}a_{21}a_{32} + sgn(3,2,1)\, a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
  $-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$
  $+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$
- $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$
- Sarrus' regel.
- Maple-illustrationer af definitionen.

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kaldes den *øvre triangulær*.

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  kaldes den *øvre triangulær*.
- Hvert led i summen $\sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ indeholder et element fra hver række.

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  kaldes den *øvre triangulær*.
- Hvert led i summen $\sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ indeholder et element fra hver række.
- Det eneste led, der ikke giver nul er $sgn\,(1,2,3,\dots,n)\, a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Determinant af triangulær matrix

- Hvis $n \times n$-matricen A opfylder $a_{ij} = 0$ for $i > j$ dvs. har den specielle form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  kaldes den *øvre triangulær*.
- Hvert led i summen $\sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ indeholder et element fra hver række.
- Det eneste led, der ikke giver nul er $sgn\,(1, 2, 3, \dots, n)\, a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.
- Altså har vi for en øvre (eller nedre) triangulær matrix, at $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_3 := R_3 - 3R_1$ og derefter $R_3 := R_3 - 14R_2$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_3 := R_3 - 3R_1$ og derefter $R_3 := R_3 - 14R_2$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

- $= 2 \cdot (-1) \cdot 17 = -34.$

Rækkeoperationernes virkning på determinanten

- $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(i \neq j)$ skifter fortegn på determinanten.
- $R_i := kR_i$ gør determinanten k gange større.
- $R_i := R_i + kR_j$ $(i \neq j)$ ændrer ikke determinantens værdi.
- Beregn determinanten $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ ved brug af Gauss-elimination:
- Operationen $R_3 := R_3 - 3R_1$ og derefter $R_3 := R_3 - 14R_2$ giver

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

- $= 2 \cdot (-1) \cdot 17 = -34.$
- Maple-illustrationer.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\,C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\,C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot \mathit{produkt\_pivot\_elementer}$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\,C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \rightarrow \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \rightarrow [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar 3.11. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)\,C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar 3.11. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.
- Sætning 3.12 $\det\left(A^T\right) = \det A$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar 3.11. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.
- Sætning 3.12 $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Bevis: $\det A = \sum_{S_n} sgn\left(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n\right) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ $= \sum_{S_n} sgn\left(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n\right) a_{i_1 1} a_{i_2 i} \cdots a_{i_n n} = \det\left(A^T\right)$.

Sætninger om determinanten

- Sætning 3.9 A er regulær, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.
- Bevis. Hvis B fremkommer af A ved en tilladelig rækkeoperation så gælder, at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.
- A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen. Men $\det I = 1 \neq 0$.
- Sætning 3.10 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Bevis. Hvis AB er invertibel, så er A også, idet $(AB)C = I$ jo medfører, at BC er invers til A.
- Vi kan antage, at A er invertibel. Ved Gauss-eliminationen $[A \mid I] \to \left[I \mid A^{-1}\right]$ ses, at $\det A = (-1)^r \cdot produkt\_pivot\_elementer$.
- Samme rækkeoperationer gør: $[A \mid AB] \to [I \mid B]$. Men herved fås, at $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- Korollar 3.11. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.
- Sætning 3.12 $\det\left(A^T\right) = \det A$.
- Bevis: $\det A = \sum_{S_n} sgn\,(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ $= \sum_{S_n} sgn\,(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 i} \cdots a_{i_n n} = \det\left(A^T\right)$.
- Maple.