

DesignMat

Determinant og Egenværdiproblemet for Matricer

Preben Alsholm

Forår 2009

Komplement til matrix I

- ▶ Lad $n \times n$ -matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Komplement til matrix I

- ▶ Lad $n \times n$ -matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ -matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A .

Komplement til matrix I

- ▶ Lad $n \times n$ -matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ -matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A .
- ▶ Determinanten af A kan udregnes således (*udvikling i komplement langs første række*):

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \\ &\quad \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} K_{1j} \end{aligned}$$

Komplement til matrix I

- ▶ Lad $n \times n$ -matricen A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ -matrix, man får ved at fjerne række i og søjle j fra A .
- ▶ Determinanten af A kan udregnes således (*udvikling i komplement langs første række*):

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \\ &\quad \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} K_{1j} \end{aligned}$$

- ▶ hvor (i, j) -komplementet til A er defineret ved $K_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Komplement til matrix II

- ▶ Mere generelt gælder: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} K_{ij}$ for ethvert i og $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} K_{ij}$ for ethvert j .

Determinanter

Komplement til
matrix I

**Komplement til
matrix II**

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Komplement til matrix II

- ▶ Mere generelt gælder: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} K_{ij}$ for ethvert i
og $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} K_{ij}$ for ethvert j .

- ▶ Udvikling langs første række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-5) \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-6) = 34.$$

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1
Eksempel 2
Eksempel 2 fortsat
Eksempel 3
Eksempel 4
Definition af
diagonaliserbar matrix
Hovedsætning om
diagonaliserbarhed
Karakterpolynomiet
Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Komplement til matrix II

- ▶ Mere generelt gælder: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} K_{ij}$ for ethvert i og $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} K_{ij}$ for ethvert j .

- ▶ Udvikling langs første række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-5) \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-6) = 34.$$

- ▶ Udvikling i komplementer langs 3. række:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 34 + 0 = 34.$$

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1
Eksempel 2
Eksempel 2 fortsat
Eksempel 3
Eksempel 4
Definition af
diagonaliserbar matrix
Hovedsætning om
diagonaliserbarhed
Karakterpolynomiet
Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Definition og Eksempel 1

- ▶ Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *eigen værdi* for A , hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

Definition og Eksempel 1

- ▶ Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *eigen værdi* for A , hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

- ▶ En vektor v , der opfylder (1), kaldes en *eigenvektor* hørende til eigen værdien λ .

Definition og Eksempel 1

- ▶ Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egen værdi* for A , hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

- ▶ En vektor v , der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egen værdien λ .

- ▶ **Eksempel 1.** Lad $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -3 \\ 0 & 36 & 10 \end{bmatrix}$ og lad

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egen værdier og Egenvektorer

Definition og Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Definition og Eksempel 1

- ▶ Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *egen værdi* for A , hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

- ▶ En vektor v , der opfylder (1), kaldes en *egenvektor* hørende til egen værdien λ .

- ▶ Eksempel 1. Lad $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -3 \\ 0 & 36 & 10 \end{bmatrix}$ og lad

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Da gælder, at $Av_1 = 3v_1$, $Av_2 = -2v_2$ og $Av_3 = v_3$.

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egen værdier og
EgenvektorerDefinition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrixHovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Definition og Eksempel 1

- ▶ Lad A være en kvadratisk matrix. Tallet λ kaldes en *eigen værdi* for A , hvis der findes en vektor $v \neq 0$, så

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

- ▶ En vektor v , der opfylder (1), kaldes en *eigenvektor* hørende til eigen værdien λ .

- ▶ Eksempel 1. Lad $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -3 \\ 0 & 36 & 10 \end{bmatrix}$ og lad

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Da gælder, at $Av_1 = 3v_1$, $Av_2 = -2v_2$ og $Av_3 = v_3$.
- ▶ Dette betyder, at tallene 3, -2 og 1 er eigen værdier for A med tilhørende eigenvektorer v_1 , v_2 og v_3 (henholdsvis).

Eksempel 2

► Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Determinanter

Komplement til
matrix I

Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Eksempel 2

▶ Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

▶ Vi vil finde egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .

Eksempel 2

- ▶ Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi vil finde egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .
- ▶ Vi skal finde tal λ for hvilke der findes $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x$.

Eksempel 2

- ▶ Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi vil finde egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .
- ▶ Vi skal finde tal λ for hvilke der findes $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x$.
- ▶ **Altså $(A - \lambda I)x = 0$ skal have en ikke-triviel løsning x .**

Eksempel 2

- ▶ Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi vil finde egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .
- ▶ Vi skal finde tal λ for hvilke der findes $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x$.
- ▶ Altså $(A - \lambda I)x = 0$ skal have en ikke-triviel løsning x .
- ▶ Dette er tilfældet, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ ikke er invertibel.

Eksempel 2

- ▶ Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi vil finde egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .
- ▶ Vi skal finde tal λ for hvilke der findes $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x$.
- ▶ Altså $(A - \lambda I)x = 0$ skal have en ikke-triviel løsning x .
- ▶ Dette er tilfældet, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ ikke er invertibel.
- ▶ Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Eksempel 2

- ▶ Lad A være matricen $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi vil finde egenverdier og tilhørende egenvektorer for A .
- ▶ Vi skal finde tal λ for hvilke der findes $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x$.
- ▶ Altså $(A - \lambda I)x = 0$ skal have en ikke-triviel løsning x .
- ▶ Dette er tilfældet, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ ikke er invertibel.
- ▶ Vi ved, at $A - \lambda I$ er invertibel hvis og kun hvis $\det(A - \lambda I) \neq 0$.
- ▶ **Egenverdierne for A er altså rødderne i karakterpolynomiet $\det(A - \lambda I)$.**

Eksempel 2 fortsat

- ▶ Karakterpolynomiet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \text{ der}$$

udregnes til

Eksempel 2 fortsat

- ▶ Karakterpolynomiet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \text{ der}$$

udregnes til

$$\text{▶ } (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -8 \\ \frac{3}{2} & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) (\lambda^2 - 2\lambda - 3).$$

Eksempel 2 fortsat

- ▶ Karakterpolynomiet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \text{ der}$$

udregnes til

- ▶ $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -8 \\ \frac{3}{2} & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) (\lambda^2 - 2\lambda - 3).$

- ▶ Rødder: 2, 3 og -1 . Disse er altså egenverdierne.

Eksempel 2 fortsat

- ▶ Karakterpolynomiet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \text{ der}$$

udregnes til

- ▶ $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -8 \\ \frac{3}{2} & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) (\lambda^2 - 2\lambda - 3).$

- ▶ Rødder: 2, 3 og -1 . Disse er altså egenverdierne.

- ▶ **Egenvektorer hørende til egenverdien 3 opfylder $(A - 3I)x = 0$.**

Eksempel 2 fortsat

- ▶ Karakterpolynomiet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \text{ der}$$

udregnes til

- ▶ $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -8 \\ \frac{3}{2} & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) (\lambda^2 - 2\lambda - 3).$

- ▶ Rødder: 2, 3 og -1 . Disse er altså egenverdierne.
- ▶ Egenvektorer hørende til egenverdien 3 opfylder $(A - 3I)x = 0$.

- ▶ **Homogent ligningssystem. Gausselimination:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2 fortsat

- ▶ Karakterpolynomiet er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -8 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \text{ der}$$

udregnes til

- ▶ $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -8 \\ \frac{3}{2} & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) (\lambda^2 - 2\lambda - 3).$

- ▶ Rødder: 2, 3 og -1 . Disse er altså egenverdierne.

- ▶ Egenvektorer hørende til egenverdien 3 opfylder $(A - 3I)x = 0$.

- ▶ Homogent ligningssystem. Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Dvs. $x_1 - 4x_3 = 0$ og $-x_2 + 9x_3 = 0$, så $x = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Eksempel 3

► Lad $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

Determinanter

Komplement til
matrix I

Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Eksempel 3

► Lad $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

► Vi har $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5 - \lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$
 $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Eksempel 3

► Lad $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

► Vi har $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5 - \lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$
 $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

- Så egenverdierne er 1 og -2 , den sidste med algebraisk multiplicitet 2.

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egenverdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Eksempel 3

▶ Lad $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

▶ Vi har $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & -5 - \lambda & 3 \\ -9 & -9 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$
 $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

▶ Så egenverdierne er 1 og -2 , den sidste med algebraisk multiplicitet 2.

▶ Egenverdierne for A^T er fuldstændig de samme, da $A^T - \lambda I = (A - \lambda I)^T$ således at $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.

Determinanter

Komplement til
matrix I
Komplement til
matrix II

Egenverdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Eksempel 4

► Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determinanter

Komplement til
matrix I

Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Eksempel 4

▶ Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

▶ Evt. egenverdier for A er rødder i karakterpolynomiet.

Eksempel 4

- ▶ Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ▶ Evt. egenverdier for A er rødder i karakterpolynomiet.
- ▶ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.

Eksempel 4

- ▶ Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ▶ Evt. egenverdier for A er rødder i karakterpolynomiet.
- ▶ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.
- ▶ $\lambda^2 + 1$ har ingen reelle rødder (men de to imaginære $\pm i$).

Eksempel 4

- ▶ Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ▶ Evt. egenverdier for A er rødder i karakterpolynomiet.
- ▶ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.
- ▶ $\lambda^2 + 1$ har ingen reelle rødder (men de to imaginære $\pm i$).
- ▶ Det betyder, at hvis vi kun accepterer reelle tal, så har A ingen egenverdier.

Eksempel 4

- ▶ Lad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ▶ Evt. egenverdier for A er rødder i karakterpolynomiet.
- ▶ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.
- ▶ $\lambda^2 + 1$ har ingen reelle rødder (men de to imaginære $\pm i$).
- ▶ Det betyder, at hvis vi kun accepterer reelle tal, så har A ingen egenverdier.
- ▶ Men accepteres komplekse tal, så har A egenverdierne $\pm i$.

Definition af diagonaliserbar matrix

- ▶ A er diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel matrix V , så $\Lambda = V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.

Definition af diagonaliserbar matrix

- ▶ A er diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel matrix V , så $\Lambda = V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.
- ▶ Hvis $\Lambda = V^{-1}AV$, så gælder $A = V\Lambda V^{-1}$ og omvendt.

Definition af diagonaliserbar matrix

- ▶ A er diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel matrix V , så $\Lambda = V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.
- ▶ Hvis $\Lambda = V^{-1}AV$, så gælder $A = V\Lambda V^{-1}$ og omvendt.
- ▶ Hvis $A = V\Lambda V^{-1}$, så fås $A^k = V\Lambda^k V^{-1}$, da eksempelvis

$$\begin{aligned} A^2 &= (V\Lambda V^{-1})^2 = (V\Lambda V^{-1})(V\Lambda V^{-1}) = V\Lambda (V^{-1}V)\Lambda V^{-1} \\ &= V\Lambda\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1} \end{aligned}$$

Definition af diagonaliserbar matrix

- ▶ A er diagonaliserbar, hvis der findes en invertibel matrix V , så $\Lambda = V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.
- ▶ Hvis $\Lambda = V^{-1}AV$, så gælder $A = V\Lambda V^{-1}$ og omvendt.
- ▶ Hvis $A = V\Lambda V^{-1}$, så fås $A^k = V\Lambda^k V^{-1}$, da eksempelvis

$$\begin{aligned} A^2 &= (V\Lambda V^{-1})^2 = (V\Lambda V^{-1})(V\Lambda V^{-1}) = V\Lambda (V^{-1}V)\Lambda V^{-1} \\ &= V\Lambda I \Lambda V^{-1} = V\Lambda \Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1} \end{aligned}$$

- ▶ Da Λ^k er let at beregne, er det dermed let at finde A^k , når vel at mærke A er diagonaliserbar.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- ▶ **Bevis.** $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- ▶ Bevis. $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.
- ▶ Lad v_1, v_2, \dots, v_n være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ og $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- ▶ Bevis. $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.
- ▶ Lad v_1, v_2, \dots, v_n være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ og $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- ▶ Med $I = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ er $\Lambda = [\lambda_1 e_1 \ \lambda_2 e_2 \ \dots \ \lambda_n e_n]$ og $Ve_k = v_k$.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- ▶ Bevis. $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.
- ▶ Lad v_1, v_2, \dots, v_n være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ og $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- ▶ Med $I = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ er $\Lambda = [\lambda_1 e_1 \ \lambda_2 e_2 \ \dots \ \lambda_n e_n]$ og $Ve_k = v_k$.
- ▶ Så $V\Lambda = [\lambda_1 Ve_1 \ \lambda_2 Ve_2 \ \dots \ \lambda_n Ve_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n]$.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- ▶ Bevis. $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.
- ▶ Lad v_1, v_2, \dots, v_n være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ og $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- ▶ Med $I = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ er $\Lambda = [\lambda_1 e_1 \ \lambda_2 e_2 \ \dots \ \lambda_n e_n]$ og $Ve_k = v_k$.
- ▶ Så $V\Lambda = [\lambda_1 Ve_1 \ \lambda_2 Ve_2 \ \dots \ \lambda_n Ve_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n]$.
- ▶ Men $AV = [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n]$.

Hovedsætning om diagonaliserbarhed

- ▶ En $n \times n$ -matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis der findes en invertibel matrix V , hvis søjler er egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n for A .
- ▶ I så fald er $V^{-1}AV$ diagonalmatricen med egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ for A i diagonalen.
- ▶ Bevis. $V^{-1}AV = \Lambda$ er ækvivalent med $AV = V\Lambda$, hvis V er invertibel.
- ▶ Lad v_1, v_2, \dots, v_n være vilkårlige vektorer og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vilkårlige tal. Lad $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ og $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- ▶ Med $I = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ er $\Lambda = [\lambda_1 e_1 \ \lambda_2 e_2 \ \dots \ \lambda_n e_n]$ og $Ve_k = v_k$.
- ▶ Så $V\Lambda = [\lambda_1 Ve_1 \ \lambda_2 Ve_2 \ \dots \ \lambda_n Ve_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n]$.
- ▶ Men $AV = [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n]$.
- ▶ Dvs. $AV = V\Lambda$ hvis og kun hvis $Av_i = \lambda_i v_i$ for alle i .

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Determinanter

Komplement til
matrix I

Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- ▶ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- ▶ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.
- ▶ Ved indsættelse af $\lambda = 0$ fås $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- ▶ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.
- ▶ Ved indsættelse af $\lambda = 0$ fås $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- ▶ Koefficienten til λ^{n-1} er $(-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$.

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- ▶ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.
- ▶ Ved indsættelse af $\lambda = 0$ fås $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- ▶ Koefficienten til λ^{n-1} er $(-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$.
- ▶ Men med $A = [a_{ij}]$, er den også $(-1)^{n+1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$.

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- ▶ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.
- ▶ Ved indsættelse af $\lambda = 0$ fås $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- ▶ Koefficienten til λ^{n-1} er $(-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$.
- ▶ Men med $A = [a_{ij}]$, er den også $(-1)^{n+1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$.
- ▶ **Summen af diagonalelementerne i A er sporet af A , $\text{spor}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.**

Karakterpolynomiet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix med karakterpolynomium $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- ▶ Lad rødderne være $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (gentaget efter multiplicitet).
- ▶ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.
- ▶ Ved indsættelse af $\lambda = 0$ fås $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- ▶ Koefficienten til λ^{n-1} er $(-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$.
- ▶ Men med $A = [a_{ij}]$, er den også $(-1)^{n+1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$.
- ▶ Summen af diagonalelementerne i A er *sporet* af A , $\text{spor}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.
- ▶ **Altså**

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{spor}(A)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$$

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.

Determinanter

Komplement til
matrix I

Komplement til
matrix II

Egenværdier og Egenvektorer

Definition og
Eksempel 1

Eksempel 2

Eksempel 2 fortsat

Eksempel 3

Eksempel 4

Definition af
diagonaliserbar matrix

Hovedsætning om
diagonaliserbarhed

Karakterpolynomiet

**Algebraisk og
geometrisk
multiplicitet**

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.
- ▶ Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.
- ▶ Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- ▶ Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k , (betegnelse $\text{am}(\lambda_1)$).

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.
- ▶ Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- ▶ Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k , (betegnelse $am(\lambda_1)$).
- ▶ Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet* j , (betegnelse $gm(\lambda_1)$).

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.
- ▶ Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- ▶ Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k , (betegnelse $am(\lambda_1)$).
- ▶ Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet* j , (betegnelse $gm(\lambda_1)$).
- ▶ Den geometriske multiplicitet er lig med antallet af frie parametre i løsningerne til $(A - \lambda_1 I)x = 0$.

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.
- ▶ Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- ▶ Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k , (betegnelse $am(\lambda_1)$).
- ▶ Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet* j , (betegnelse $gm(\lambda_1)$).
- ▶ Den geometriske multiplicitet er lig med antallet af frie parametre i løsningerne til $(A - \lambda_1 I)x = 0$.
- ▶ Der gælder: $1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda)$ for enhver egenværdi λ .

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

- ▶ Lad A være en $n \times n$ -matrix.
- ▶ Karakterpolynomiet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har n rødder regnet med multiplicitet.
- ▶ Hvis roden λ_1 har multiplicitet k i $p(\lambda)$, så har egenværdien λ_1 *algebraisk multiplicitet* k , (betegnelse $am(\lambda_1)$).
- ▶ Hvis matricen $A - \lambda_1 I$ har rang $n - j$, så har λ_1 *geometrisk multiplicitet* j , (betegnelse $gm(\lambda_1)$).
- ▶ Den geometriske multiplicitet er lig med antallet af frie parametre i løsningerne til $(A - \lambda_1 I)x = 0$.
- ▶ Der gælder: $1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda)$ for enhver egenværdi λ .
- ▶ **Bevis: Se side 204.**