

DesignMat

Komplekse tal

Preben Alsholm

Uge 7 Forår 2009

- ▶ \mathbb{N} er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ \mathbb{N} er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Z} er mængden af *hele tal*
 $\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

- ▶ \mathbb{N} er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Z} er mængden af *hele tal*
 $\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Q} er mængden af *rationale tal*, dvs. brøker og hele tal.

- ▶ \mathbb{N} er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Z} er mængden af *hele tal*
 $\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Q} er mængden af *rationale tal*, dvs. brøker og hele tal.
- ▶ \mathbb{R} er mængden af *reelle tal*. Identificeres med mængden af punkter på en tallinie. De reelle tal, der ikke er rationale, kaldes *irrationale*.

- ▶ \mathbb{N} er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Z} er mængden af *hele tal*
 $\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Q} er mængden af *rationale tal*, dvs. brøker og hele tal.
- ▶ \mathbb{R} er mængden af *reelle tal*. Identificeres med mængden af punkter på en tallinie. De reelle tal, der ikke er rationale, kaldes *irrationale*.
- ▶ \mathbb{C} er mængden af *komplekse tal*. Identificeres med mængden af punkter i planen. De komplekse tal, der ikke er reelle, kaldes *imaginære*.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de
komplekse tal IRegneregler for de
reelle talPolære koordinater i
den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de
komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den
imaginære enhedKompleks konjugation
Division?

- ▶ \mathbb{N} er mængden af *naturlige tal*, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Z} er mængden af *hele tal*
 $\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- ▶ \mathbb{Q} er mængden af *rationale tal*, dvs. brøker og hele tal.
- ▶ \mathbb{R} er mængden af *reelle tal*. Identificeres med mængden af punkter på en tallinie. De reelle tal, der ikke er rationale, kaldes *irrationale*.
- ▶ \mathbb{C} er mængden af *komplekse tal*. Identificeres med mængden af punkter i planen. De komplekse tal, der ikke er reelle, kaldes *imaginære*.
- ▶ Vi har $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Z} .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Q} .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation
Division?

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ Ligningen $x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Q} .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ Ligningen $x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{R} .

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ Ligningen $x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{R} .
- ▶ Ligningen $x^2 + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{R} .

- ▶ Ligningen $x + 2 = 1$ har ingen løsning indenfor \mathbb{N} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ Ligningen $2x + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Z} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ Ligningen $x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{Q} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{R} .
- ▶ Ligningen $x^2 + 1 = 0$ har ingen løsning indenfor \mathbb{R} .
- ▶ men har indenfor \mathbb{C} .

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal definere både addition og multiplikation i \mathbb{C} .

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal definere både addition og multiplikation i \mathbb{C} .
- ▶ De regneregler, vi kender fra \mathbb{R} , ønsker vi også skal gælde i \mathbb{C} .

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal definere både addition og multiplikation i \mathbb{C} .
- ▶ De regneregler, vi kender fra \mathbb{R} , ønsker vi også skal gælde i \mathbb{C} .
- ▶ Vi skal sørge for, at \mathbb{C} kan betragtes som en udvidelse af \mathbb{R} .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal definere både addition og multiplikation i \mathbb{C} .
- ▶ De regneregler, vi kender fra \mathbb{R} , ønsker vi også skal gælde i \mathbb{C} .
- ▶ Vi skal sørge for, at \mathbb{C} kan betragtes som en udvidelse af \mathbb{R} .
- ▶ Altså $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal definere både addition og multiplikation i \mathbb{C} .
- ▶ De regneregler, vi kender fra \mathbb{R} , ønsker vi også skal gælde i \mathbb{C} .
- ▶ Vi skal sørge for, at \mathbb{C} kan betragtes som en udvidelse af \mathbb{R} .
- ▶ Altså $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- ▶ Vi skal se, at \mathbb{R} kan opfattes som punkterne på førsteaksen, *den reelle akse*.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Indførelse af de komplekse tal I

- ▶ \mathbb{C} er som mængde betragtet lig med punkterne i planen. Planen identificeres med \mathbb{R}^2 , så $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
- ▶ Vi skal definere både addition og multiplikation i \mathbb{C} .
- ▶ De regneregler, vi kender fra \mathbb{R} , ønsker vi også skal gælde i \mathbb{C} .
- ▶ Vi skal sørge for, at \mathbb{C} kan betragtes som en udvidelse af \mathbb{R} .
- ▶ Altså $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- ▶ Vi skal se, at \mathbb{R} kan opfattes som punkterne på førsteaksen, *den reelle akse*.
- ▶ Vi ønsker at blive i stand til at løse bl.a. ligningen $x^2 + 1 = 0$ indenfor \mathbb{C} .

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)

Komplekse tal

Preben Alsholm

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de
komplekse tal I

**Regneregler for de
reelle tal**

Polære koordinater i
den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de
komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den
imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$
7. $1a = a$

Regneregler for de reelle tal

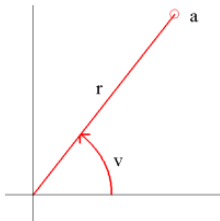
1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$
7. $1a = a$
8. $a + x = 0$ har præcis én løsning for x

Regneregler for de reelle tal

1. $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
3. $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
4. $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
5. $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
6. $a + 0 = a$
7. $1a = a$
8. $a + x = 0$ har præcis én løsning for x
9. $ax = 1$ har præcis én løsning for x , når $a \neq 0$

Polære koordinater i den komplekse plan

- Lad $a = (a_1, a_2)$. *Modulus*: $r = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
(absolutværdi, numerisk værdi).



Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de
komplekse tal IRegneregler for de
reelle talPolære koordinater i
den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de
komplekse tal II

Regneregler

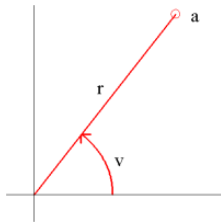
De reelle tal og den
imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Polære koordinater i den komplekse plan

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. *Modulus*: $r = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
(absolutværdi, numerisk værdi).



- ▶ *Argument*: Vinklen fra den reelle akse positive del til linien fra $(0,0)$ til a . Betegnelse: $v = \arg(a)$. Regnes med fortegn.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

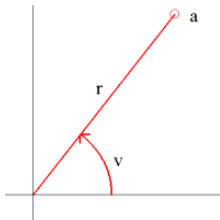
De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Polære koordinater i den komplekse plan

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. *Modulus*: $r = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
(absolutværdi, numerisk værdi).



- ▶ *Argument*: Vinklen fra den reelle akse positive del til linien fra $(0,0)$ til a . Betegnelse: $v = \arg(a)$. Regnes med fortegn.
- ▶ Ethvert punkt i planen kan skrives på polær form: $a = r_v = (r \cos v, r \sin v)$, hvor r er modulus og v er et argument for a .

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

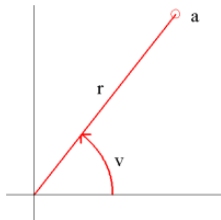
De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Polære koordinater i den komplekse plan

- ▶ Lad $a = (a_1, a_2)$. *Modulus*: $r = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
(absolutværdi, numerisk værdi).



- ▶ *Argument*: Vinklen fra den reelle akse positive del til linien fra $(0,0)$ til a . Betegnelse: $v = \arg(a)$. Regnes med fortegn.
- ▶ Ethvert punkt i planen kan skrives på polær form: $a = r_v = (r \cos v, r \sin v)$, hvor r er modulus og v er et argument for a .
- ▶ *Hovedargumentet* for a er det argument, der ligger i $]-\pi, \pi]$. Betegnes $\text{Arg}(a)$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Overgangsformler

► Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ har vi

$$a_1 = r \cos v \text{ og } a_2 = r \sin v$$

Overgangsformler

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ har vi

$$a_1 = r \cos v \text{ og } a_2 = r \sin v$$

- ▶ Omvendt har vi

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ har vi

$$a_1 = r \cos v \text{ og } a_2 = r \sin v$$

- ▶ Omvendt har vi

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- ▶ desuden

$$\cos v = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \sin v = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \tan v = \frac{a_2}{a_1}$$

I den sidste forudsættes $a_1 \neq 0$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de
komplekse tal IRegneregler for de
reelle talPolære koordinater i
den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de
komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den
imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ har vi

$$a_1 = r \cos v \text{ og } a_2 = r \sin v$$

- ▶ Omvendt har vi

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- ▶ desuden

$$\cos v = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \sin v = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \tan v = \frac{a_2}{a_1}$$

I den sidste forudsættes $a_1 \neq 0$.

$$\text{▶ } v = \begin{cases} \arctan \frac{a_2}{a_1} & \text{for } a_1 > 0 \\ \arctan \frac{a_2}{a_1} \pm \pi & \text{for } a_1 < 0 \end{cases} \text{ for } a_1 \neq 0.$$

[Talmængder](#)[Talmængder](#)[Ligninger](#)[Indførelse af de komplekse tal I](#)[Regneregler for de reelle tal](#)[Polære koordinater i den komplekse plan](#)[Overgangsformler](#)[Indførelse af de komplekse tal II](#)[Regneregler](#)[De reelle tal og den imaginære enhed](#)[Kompleks konjugation](#)[Division?](#)

Addition og multiplikation

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi

Addition og multiplikation

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi
- ▶ Summen $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, (altså stedvektoraddition)

Talmængder

Talmængder
Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Addition og multiplikation

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_\nu$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi
- ▶ Summen $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, (altså stedvektoraddition)
- ▶ Produktet $ab = (r\rho)_{\nu+\theta}$. (Dette er den vigtige del!)

Addition og multiplikation

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_\nu$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi
- ▶ Summen $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, (altså stedvektoraddition)
- ▶ Produktet $ab = (r\rho)_{\nu+\theta}$. (Dette er den vigtige del!)
- ▶ Sætning: $ab = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

Addition og multiplikation

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_\nu$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi
- ▶ Summen $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, (altså stedvektoraddition)
- ▶ Produktet $ab = (r\rho)_{\nu+\theta}$. (Dette er den vigtige del!)
- ▶ Sætning: $ab = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.
- ▶ **Bevis: Bruger additionsformlerne**

$$\cos(\nu + \theta) = \cos \nu \cos \theta - \sin \nu \sin \theta$$

$$\sin(\nu + \theta) = \sin \nu \cos \theta + \cos \nu \sin \theta$$

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Med $a = (a_1, a_2) = r_v$ og $b = (b_1, b_2) = \rho_\theta$ definerer vi
- ▶ Summen $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, (altså stedvektoraddition)
- ▶ Produktet $ab = (r\rho)_{v+\theta}$. (Dette er den vigtige del!)
- ▶ Sætning: $ab = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.
- ▶ Bevis: Bruger additionsformlerne

$$\cos(v + \theta) = \cos v \cos \theta - \sin v \sin \theta$$

$$\sin(v + \theta) = \sin v \cos \theta + \cos v \sin \theta$$

- ▶ $ab = (r\rho)_{v+\theta} = (r\rho \cos(v + \theta), r\rho \sin(v + \theta)) = (r\rho (\cos v \cos \theta - \sin v \sin \theta), r\rho (\cos v \sin \theta + \sin v \cos \theta)) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
- ▶ $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
- ▶ $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
- ▶ $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
- ▶ $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
- ▶ $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
- ▶ $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
- ▶ $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
- ▶ $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
- ▶ $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
- ▶ $a + z = b$ har præcis én løsning for z

- ▶ Der gælder nu følgende regneregler:
- ▶ $a + b = b + a$ (den kommutative lov for addition)
- ▶ $(a + b) + c = a + (b + c)$ (den associative lov for addition)
- ▶ $ab = ba$ (den kommutative lov for multiplikation)
- ▶ $(ab)c = a(bc)$ (den associative lov for multiplikation)
- ▶ $a(b + c) = ab + ac$ (den distributive lov)
- ▶ $a + z = b$ har præcis én løsning for z
- ▶ $az = b$ har præcis én løsning for z , når $a \neq 0$.

De reelle tal og den imaginære enhed

Komplekse tal

Preben Alsholm

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de
komplekse tal I

Regneregler for de
reelle tal

Polære koordinater i
den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de
komplekse tal II

Regneregler

**De reelle tal og den
imaginære enhed**

Kompleks konjugation

Division?

- ▶ Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.

De reelle tal og den imaginære enhed

- ▶ Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.
- ▶ $\mathcal{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De komplekse tal i \mathcal{R} opfører sig i enhver henseende som reelle tal ifølge ovenstående.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

De reelle tal og den imaginære enhed

- ▶ Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.
- ▶ $\mathcal{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De komplekse tal i \mathcal{R} opfører sig i enhver henseende som reelle tal ifølge ovenstående.
- ▶ ... men så er det de reelle tal, og vi vil skrive x i stedet for $(x, 0)$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

De reelle tal og den imaginære enhed

- ▶ Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.
- ▶ $\mathcal{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De komplekse tal i \mathcal{R} opfører sig i enhver henseende som reelle tal ifølge ovenstående.
- ▶ ... men så er det de reelle tal, og vi vil skrive x i stedet for $(x, 0)$.
- ▶ Sæt $i = (0, 1) = 1 \frac{\pi}{2}$. Så gælder $i^2 = i \cdot i = 1 \frac{\pi}{2} \cdot 1 \frac{\pi}{2} = 1 \pi = (-1, 0) = -1$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation
Division?

De reelle tal og den imaginære enhed

- ▶ Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.
- ▶ $\mathcal{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De komplekse tal i \mathcal{R} opfører sig i enhver henseende som reelle tal ifølge ovenstående.
- ▶ ... men så er det de reelle tal, og vi vil skrive x i stedet for $(x, 0)$.
- ▶ Sæt $i = (0, 1) = 1 \frac{\pi}{2}$. Så gælder $i^2 = i \cdot i = 1 \frac{\pi}{2} \cdot 1 \frac{\pi}{2} = 1 \pi = (-1, 0) = -1$.
- ▶ Vi har nu $a = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, 0) + (0, 1)(a_2, 0) = a_1 + ia_2$

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

De reelle tal og den imaginære enhed

- ▶ Bemærk, at $(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0)$ og $(a_1, 0) \cdot (b_1, 0) = (a_1 b_1, 0)$.
- ▶ $\mathcal{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De komplekse tal i \mathcal{R} opfører sig i enhver henseende som reelle tal ifølge ovenstående.
- ▶ ... men så er det de reelle tal, og vi vil skrive x i stedet for $(x, 0)$.
- ▶ Sæt $i = (0, 1) = 1 \frac{\pi}{2}$. Så gælder $i^2 = i \cdot i = 1 \frac{\pi}{2} \cdot 1 \frac{\pi}{2} = 1 \pi = (-1, 0) = -1$.
- ▶ Vi har nu $a = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, 0) + (0, 1)(a_2, 0) = a_1 + ia_2$
- ▶ **Realdel: $\operatorname{Re} a = a_1$. Imaginærdel: $\operatorname{Im} a = a_2$.**

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Kompleks konjugation

Komplekse tal

Preben Alsholm

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de
komplekse tal I

Regneregler for de
reelle tal

Polære koordinater i
den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de
komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den
imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

► Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.

Kompleks konjugation

▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.

▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.

Kompleks konjugation

- ▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- ▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.
- ▶ $|ab| = |a| |b|$.

Kompleks konjugation

▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.

▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.

▶ $|ab| = |a| |b|$.

▶ $|a^n| = |a|^n$.

Kompleks konjugation

- ▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- ▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.
- ▶ $|ab| = |a| |b|$.
- ▶ $|a^n| = |a|^n$.
- ▶ $\arg(ab) = \arg a + \arg b$.

Kompleks konjugation

- ▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- ▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.
- ▶ $|ab| = |a| |b|$.
- ▶ $|a^n| = |a|^n$.
- ▶ $\arg(ab) = \arg a + \arg b$.
- ▶ $\arg(a^n) = n \arg a$.

Kompleks konjugation

- ▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- ▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.
- ▶ $|ab| = |a| |b|$.
- ▶ $|a^n| = |a|^n$.
- ▶ $\arg(ab) = \arg a + \arg b$.
- ▶ $\arg(a^n) = n \arg a$.
- ▶ $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$.

Kompleks konjugation

- ▶ Kompleks konjugation: $\bar{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2$.
- ▶ $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ og $\overline{(ab)} = \bar{a}\bar{b}$.
- ▶ $|ab| = |a| |b|$.
- ▶ $|a^n| = |a|^n$.
- ▶ $\arg(ab) = \arg a + \arg b$.
- ▶ $\arg(a^n) = n \arg a$.
- ▶ $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg a - \arg b$.
- ▶ De 3 sidste skal forstås ret!

Division?

- ▶ Med a^{-1} menes løsningen til ligningen $az = 1$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Division?

- ▶ Med a^{-1} menes løsningen til ligningen $az = 1$.
- ▶ a^{-1} skrives også $\frac{1}{a}$.

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?

Division?

- ▶ Med a^{-1} menes løsningen til ligningen $az = 1$.
- ▶ a^{-1} skrives også $\frac{1}{a}$.
- ▶ Med $\frac{b}{a}$ menes ba^{-1} . Dette tal er løsningen til ligningen $az = b$.

- ▶ Med a^{-1} menes løsningen til ligningen $az = 1$.
- ▶ a^{-1} skrives også $\frac{1}{a}$.
- ▶ Med $\frac{b}{a}$ menes ba^{-1} . Dette tal er løsningen til ligningen $az = b$.
- ▶ En metode til konkret udregning:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-4+7i} &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4+7i)(-4-7i)} = \frac{(2+3i)(-4-7i)}{(-4)^2 - (7i)^2} \\ &= \frac{(2+3i)(-4-7i)}{16+49} = \frac{13-26i}{65} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

Talmængder

Talmængder

Ligninger

Indførelse af de komplekse tal I

Regneregler for de reelle tal

Polære koordinater i den komplekse plan

Overgangsformler

Indførelse af de komplekse tal II

Regneregler

De reelle tal og den imaginære enhed

Kompleks konjugation

Division?