

# DesignMat

## Lineære differentialligninger I

Preben Alsholm

Uge 9 Forår 2009

Normeret lineær  
differentialligning  
Panzerformlen  
Eksempel 1  
Eksistens- og  
entydighed

Eksistens- og  
entydighed  
Den homogene ligning  
I  
Den homogene ligning  
II  
Den homogene ligning  
III  
Den homogene  
ligning: Eksempel 1  
Den homogene  
ligning: Eksempel 2  
Den homogene  
ligning: Eksempel 3  
Den inhomogene  
ligning I  
Den inhomogene  
ligning II  
Eksempel 1  
Eksempel 2

# Normeret lineær differentiallyigning

- ▶ En differentiallyigning, der kan skrives på formen

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (1)$$

hvor  $t \in I$ , kaldes *lineær*.

# Normeret lineær differentiallyigning

- ▶ En differentiallyigning, der kan skrives på formen

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (1)$$

hvor  $t \in I$ , kaldes *lineær*.

- ▶ Når (1) har den specielle form

$$x' + p(t)x = q(t) \quad (2)$$

siges den at være normeret.

# Normeret lineær differentiaalligning

- ▶ En differentiaalligning, der kan skrives på formen

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (1)$$

hvor  $t \in I$ , kaldes *lineær*.

- ▶ Når (1) har den specielle form

$$x' + p(t)x = q(t) \quad (2)$$

siges den at være normeret.

- ▶ **Eksempel 1. Differentiaalligningen**

$$tx' + 2x = te^{-t} \quad (3)$$

hvor  $t \in \mathbb{R}_+$ , er lineær, men ikke normeret. Ved normering fås

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

# Panserformlen

- Lad  $p, q \in C(I)$  hvor  $I$  er et interval. Så er den fuldstændige løsning til  $x' + p(t)x = q(t)$  givet ved

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)} \quad (4)$$

hvor  $P$  er en vilkårligt valgt stamfunktion til  $p$ , og hvor  $C \in \mathbb{R}$  er en arbitrær konstant.

# Panserformlen

- ▶ Lad  $p, q \in C(I)$  hvor  $I$  er et interval. Så er den fuldstændige løsning til  $x' + p(t)x = q(t)$  givet ved

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)} \quad (4)$$

hvor  $P$  er en vilkårligt valgt stamfunktion til  $p$ , og hvor  $C \in \mathbb{R}$  er en arbitrær konstant.

- ▶ **Bevis:** Da  $e^{P(t)} > 0$  for alle  $t \in I$ , har  $x' + p(t)x = q(t)$  de samme løsninger som

$$x'(t) e^{P(t)} + p(t) e^{P(t)} x(t) = e^{P(t)} q(t)$$

# Panserformlen

- ▶ Lad  $p, q \in C(I)$  hvor  $I$  er et interval. Så er den fuldstændige løsning til  $x' + p(t)x = q(t)$  givet ved

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)} \quad (4)$$

hvor  $P$  er en vilkårligt valgt stamfunktion til  $p$ , og hvor  $C \in \mathbb{R}$  er en arbitrær konstant.

- ▶ Bevis: Da  $e^{P(t)} > 0$  for alle  $t \in I$ , har  $x' + p(t)x = q(t)$  de samme løsninger som

$$x'(t) e^{P(t)} + p(t) e^{P(t)} x(t) = e^{P(t)} q(t)$$

- ▶ Men dette kan skrives  $\frac{d}{dt} \left( e^{P(t)} x(t) \right) = e^{P(t)} q(t)$ ,

# Panserformlen

- ▶ Lad  $p, q \in C(I)$  hvor  $I$  er et interval. Så er den fuldstændige løsning til  $x' + p(t)x = q(t)$  givet ved

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)} \quad (4)$$

hvor  $P$  er en vilkårligt valgt stamfunktion til  $p$ , og hvor  $C \in \mathbb{R}$  er en arbitrær konstant.

- ▶ Bevis: Da  $e^{P(t)} > 0$  for alle  $t \in I$ , har  $x' + p(t)x = q(t)$  de samme løsninger som

$$x'(t) e^{P(t)} + p(t) e^{P(t)} x(t) = e^{P(t)} q(t)$$

- ▶ Men dette kan skrives  $\frac{d}{dt} \left( e^{P(t)} x(t) \right) = e^{P(t)} q(t)$ ,
- ▶ hvilket er ensbetydende med, at  $e^{P(t)} x(t)$  er en stamfunktion til  $e^{P(t)} q(t)$ , dvs. ensbetydende med eksistensen af en konstant  $C \in \mathbb{R}$ , så

$$e^{P(t)} x(t) = \int e^{P(t)} q(t) dt + C$$



# Eksempel 1

- ▶ Eksempel 1. Vi betragter for  $t > 0$  den normerede differentialligning

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

# Eksempel 1

- ▶ Eksempel 1. Vi betragter for  $t > 0$  den normerede differentialligning

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

- ▶ Vi har  $p(t) = \frac{2}{t}$ ,  $q(t) = e^{-t}$ . Panserformlens  $P$  er givet ved  $P(t) = \int \frac{2}{t} dt = 2 \ln t$ .

# Eksempel 1

- ▶ Eksempel 1. Vi betragter for  $t > 0$  den normerede differentialligning

$$x' + \frac{2}{t}x = e^{-t}$$

- ▶ Vi har  $p(t) = \frac{2}{t}$ ,  $q(t) = e^{-t}$ . Panserformlens  $P$  er givet ved  $P(t) = \int \frac{2}{t} dt = 2 \ln t$ .
- ▶ Så  $e^{P(t)} = e^{2 \ln t} = t^2$  og  $e^{-P(t)} = t^{-2}$ . Hermed er den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned}x(t) &= t^{-2} \int t^2 e^{-t} dt + Ct^{-2} \\&= t^{-2} (-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}) + Ct^{-2} \\&= - \left( 1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} \right) e^{-t} + \frac{C}{t^2}\end{aligned}$$

hvor  $C \in \mathbb{R}$ .

# Eksistens- og entydighed

- Lad  $p, q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0 \in \mathbb{R}$ . *Begyndelsesværdiproblemet*

$$x' + p(t)x = q(t) \text{ med } x(t_0) = x_0$$

har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

# Eksistens- og entydighed

- ▶ Lad  $p, q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0 \in \mathbb{R}$ . *Begyndelsesværdiproblemet*

$$x' + p(t)x = q(t) \text{ med } x(t_0) = x_0$$

har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

- ▶ Den omtalte løsning kan, når  $P$  vælges som  $P(t) = \int_{t_0}^t p(s) ds$  skrives

$$x(t) = e^{-P(t)} \int_{t_0}^t e^{P(s)} q(s) ds + x_0 e^{-P(t)}$$

# Eksistens- og entydighed

- ▶ Lad  $p, q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0 \in \mathbb{R}$ . *Begyndelsesværdiproblemet*

$$x' + p(t)x = q(t) \text{ med } x(t_0) = x_0$$

har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

- ▶ Den omtalte løsning kan, når  $P$  vælges som  $P(t) = \int_{t_0}^t p(s) ds$  skrives

$$x(t) = e^{-P(t)} \int_{t_0}^t e^{P(s)} q(s) ds + x_0 e^{-P(t)}$$

- ▶ **Beviset består blot i at bruge bestemt integration i beviset for panserformlen ovenfor.**

# Eksistens- og entydighed

- ▶ Vi betragter *lineære differentialligninger med konstante koefficienter*:

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (5)$$

med  $q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval.  $a, b, c$  er reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

# Eksistens- og entydighed

- ▶ Vi betragter *lineære differentialligninger med konstante koefficienter*:

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (5)$$

med  $q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval.  $a, b, c$  er reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ **Sætning.** Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .  
*Begyndelsesværdiproblemet for (5) med  $x(t_0) = x_0$  og  $x'(t_0) = v_0$  har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .*



# Eksistens- og entydighed

- ▶ Vi betragter *lineære differentialligninger med konstante koefficienter*:

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (5)$$

med  $q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval.  $a, b, c$  er reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Sætning. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .

*Begyndelsesværdiproblemet* for (5) med  $x(t_0) = x_0$  og  $x'(t_0) = v_0$  har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

- ▶ **Beviset springer vi over.**

# Eksistens- og entydighed

- ▶ Vi betragter *lineære differentiaalligninger med konstante koefficienter*:

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (5)$$

med  $q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval.  $a, b, c$  er reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Sætning. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .

*Begyndelsesværdiproblemet* for (5) med  $x(t_0) = x_0$  og  $x'(t_0) = v_0$  har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

- ▶ Beviset springer vi over.
- ▶ **Eksempel.** Den løsning til differentiaalligningen  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ , der opfylder  $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{4}{5}$  er

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t}$$

# Eksistens- og entydighed

- ▶ Vi betragter *lineære differentiallyigninger med konstante koefficienter*:

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (5)$$

med  $q \in C(I)$ , hvor  $I$  er et interval.  $a, b, c$  er reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Sætning. Lad  $t_0 \in I$  og  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .

*Begyndelsesværdiproblemet* for (5) med  $x(t_0) = x_0$  og  $x'(t_0) = v_0$  har netop én løsning og den er defineret på hele intervallet  $I$ .

- ▶ Beviset springer vi over.
- ▶ Eksempel. Den løsning til differentiallyigningen  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ , der opfylder  $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{4}{5}$  er

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t}$$

- ▶ Hvordan?

# Den homogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu specialtilfældet hvor højresiden  $q(t) = 0$ . En sådan lineær differentialligning kaldes *homogen*:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (6)$$

Stadig er  $a, b, c$  reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

# Den homogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu specialtilfældet hvor højresiden  $q(t) = 0$ . En sådan lineær differentialligning kaldes *homogen*:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (6)$$

Stadig er  $a, b, c$  reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Vi begynder med at finde løsninger af formen  $x(t) = e^{Rt}$ , hvor  $R$  er en (muligvis kompleks) konstant.

# Den homogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu specialtilfældet hvor højresiden  $q(t) = 0$ . En sådan lineær differentialligning kaldes *homogen*:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (6)$$

Stadig er  $a, b, c$  reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Vi begynder med at finde løsninger af formen  $x(t) = e^{Rt}$ , hvor  $R$  er en (muligvis kompleks) konstant.
- ▶ Vi har  $x' = R e^{Rt}$ ,  $x'' = R^2 e^{Rt}$ . Ved indsættelse i (6) fås

$$(aR^2 + bR + c) e^{Rt} = 0$$

# Den homogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu specialtilfældet hvor højresiden  $q(t) = 0$ . En sådan lineær differentialligning kaldes *homogen*:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (6)$$

Stadig er  $a, b, c$  reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Vi begynder med at finde løsninger af formen  $x(t) = e^{Rt}$ , hvor  $R$  er en (muligvis kompleks) konstant.
- ▶ Vi har  $x' = R e^{Rt}$ ,  $x'' = R^2 e^{Rt}$ . Ved indsættelse i (6) fås

$$(aR^2 + bR + c) e^{Rt} = 0$$

- ▶ Dette betyder, at  $x(t) = e^{Rt}$  er løsning til (6) hvis og kun hvis

$$aR^2 + bR + c = 0 \quad (7)$$

# Den homogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu specialtilfældet hvor højresiden  $q(t) = 0$ . En sådan lineær differentialligning kaldes *homogen*:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (6)$$

Stadig er  $a, b, c$  reelle konstanter og  $a \neq 0$ .

- ▶ Vi begynder med at finde løsninger af formen  $x(t) = e^{Rt}$ , hvor  $R$  er en (muligvis kompleks) konstant.
- ▶ Vi har  $x' = R e^{Rt}$ ,  $x'' = R^2 e^{Rt}$ . Ved indsættelse i (6) fås

$$(aR^2 + bR + c) e^{Rt} = 0$$

- ▶ Dette betyder, at  $x(t) = e^{Rt}$  er løsning til (6) hvis og kun hvis

$$aR^2 + bR + c = 0 \quad (7)$$

- ▶ (7) kaldes karakterligningen for (6).



# Den homogene ligning II

- ▶ Sætning. Hvis  $f_1$  og  $f_2$  er løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ , så er også  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  løsning, når blot  $c_1, c_2$  er konstanter.

# Den homogene ligning II

- ▶ Sætning. Hvis  $f_1$  og  $f_2$  er løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ , så er også  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  løsning, når blot  $c_1, c_2$  er konstanter.
- ▶ Sætning. Lad  $f_1$  og  $f_2$  være løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ . Så er den fuldstændige løsning givet ved

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (8)$$

hvis og kun hvis der findes et  $t_0 \in \mathbb{R}$  så  
Wronskideterminanten

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

# Den homogene ligning II

- ▶ Sætning. Hvis  $f_1$  og  $f_2$  er løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ , så er også  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  løsning, når blot  $c_1, c_2$  er konstanter.
- ▶ Sætning. Lad  $f_1$  og  $f_2$  være løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ . Så er den fuldstændige løsning givet ved

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (8)$$

hvis og kun hvis der findes et  $t_0 \in \mathbb{R}$  så  
Wronskideterminanten

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

- ▶ **Bevis.** Som vist er enhver linearkombination af formen (8) løsning. Vi skal vise, at der ikke er andre.

# Den homogene ligning II

- ▶ Sætning. Hvis  $f_1$  og  $f_2$  er løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ , så er også  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  løsning, når blot  $c_1, c_2$  er konstanter.
- ▶ Sætning. Lad  $f_1$  og  $f_2$  være løsninger til  $ax'' + bx' + cx = 0$ . Så er den fuldstændige løsning givet ved

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (8)$$

hvis og kun hvis der findes et  $t_0 \in \mathbb{R}$  så  
Wronskideterminanten

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

- ▶ Bevis. Som vist er enhver linearkombination af formen (8) løsning. Vi skal vise, at der ikke er andre.
- ▶ Lad da  $x = f(t)$  være en løsning til  $ax'' + bx' + cx = 0$ . Vi skal vise, at der findes konstanter  $c_1, c_2$ , så  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ .

# Den homogene ligning III

- ▶ Men sådanne konstanter må opfylde det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned}c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) &= f(t_0) \\c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) &= f'(t_0)\end{aligned}$$

# Den homogene ligning III

- ▶ Men sådanne konstanter må opfylde det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned}c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) &= f(t_0) \\c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) &= f'(t_0)\end{aligned}$$

- ▶ Dette system har løsning for enhver højreside netop når dets determinant  $W(t_0) \neq 0$ . Men funktionen  $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  og  $f(t)$  opfylder samme begyndelsesbetingelser i  $t_0$ . I følge entydighedssætningen har vi derfor  $f = g$ .

# Den homogene ligning III

- ▶ Men sådanne konstanter må opfylde det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned}c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) &= f(t_0) \\c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) &= f'(t_0)\end{aligned}$$

- ▶ Dette system har løsning for enhver højreside netop når dets determinant  $W(t_0) \neq 0$ . Men funktionen  $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  og  $f(t)$  opfylder samme begyndelsesbetingelser i  $t_0$ . I følge entydighedssætningen har vi derfor  $f = g$ .
- ▶ **Sætning.** Der findes to løsninger  $f_1$  og  $f_2$  til  $ax'' + bx' + cx = 0$  for hvilke  $W(t) \neq 0$ .

# Den homogene ligning III

- ▶ Men sådanne konstanter må opfylde det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned}c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) &= f(t_0) \\c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) &= f'(t_0)\end{aligned}$$

- ▶ Dette system har løsning for enhver højreside netop når dets determinant  $W(t_0) \neq 0$ . Men funktionen  $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  og  $f(t)$  opfylder samme begyndelsesbetingelser i  $t_0$ . I følge entydighedssætningen har vi derfor  $f = g$ .
- ▶ Sætning. Der findes to løsninger  $f_1$  og  $f_2$  til  $ax'' + bx' + cx = 0$  for hvilke  $W(t) \neq 0$ .
- ▶ **Bevis:** Her bruger vi eksistensdelen af eksistens- og entydighedssætningen. Vælg  $f_1$  og  $f_2$  som løsninger, der opfylder  $f_1(0) = 1, f_1'(0) = 0$  og  $f_2(0) = 0, f_2'(0) = 1$ . Så gælder  $W(0) = 1 \neq 0$ .



# Den homogene ligning: Eksempel 1

- ▶ Eksempel.  $x'' + 3x' + 2x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 3R + 2 = 0$  med rødderne  $-2$  og  $-1$ .

# Den homogene ligning: Eksempel 1

- ▶ Eksempel.  $x'' + 3x' + 2x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 3R + 2 = 0$  med rødderne  $-2$  og  $-1$ .
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{-2t}$  og  $\phi_2(t) = e^{-t}$  løsninger til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Deres Wronskideterminant er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t} \neq 0$$

# Den homogene ligning: Eksempel 1

- ▶ Eksempel.  $x'' + 3x' + 2x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 3R + 2 = 0$  med rødderne  $-2$  og  $-1$ .
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{-2t}$  og  $\phi_2(t) = e^{-t}$  løsninger til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Deres Wronskideterminant er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t} \neq 0$$

- ▶ Så den fuldstændige løsning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

# Den homogene ligning: Eksempel 1

- ▶ Eksempel.  $x'' + 3x' + 2x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 3R + 2 = 0$  med rødderne  $-2$  og  $-1$ .
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{-2t}$  og  $\phi_2(t) = e^{-t}$  løsninger til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Deres Wronskideterminant er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t} \neq 0$$

- ▶ Så den fuldstændige løsning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Generelt for to forskellige reelle rødder  $r_1$  og  $r_2$ . Fuldstændige løsning  $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

# Den homogene ligning: Eksempel 2

- ▶ Eksempel.  $x'' - 6x' + 9x = 0$  har karakterligningen  $R^2 - 6R + 9 = 0$  med dobbeltroden 3.

## Den homogene ligning: Eksempel 2

- ▶ Eksempel.  $x'' - 6x' + 9x = 0$  har karakterligningen  $R^2 - 6R + 9 = 0$  med dobbeltroden 3.
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{3t}$  løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Men vi mangler en anden.

## Den homogene ligning: Eksempel 2

- ▶ Eksempel.  $x'' - 6x' + 9x = 0$  har karakterligningen  $R^2 - 6R + 9 = 0$  med dobbeltroden 3.
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{3t}$  løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Men vi mangler en anden.
- ▶ En anden er  $\phi_2(t) = te^{3t}$ , hvilket ses ved simpel indsættelse.

## Den homogene ligning: Eksempel 2

- ▶ Eksempel.  $x'' - 6x' + 9x = 0$  har karakterligningen  $R^2 - 6R + 9 = 0$  med dobbeltroden 3.
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{3t}$  løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Men vi mangler en anden.
- ▶ En anden er  $\phi_2(t) = te^{3t}$ , hvilket ses ved simpel indsættelse.
- ▶ **Wronskideterminanten er**

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0$$



## Den homogene ligning: Eksempel 2

- ▶ Eksempel.  $x'' - 6x' + 9x = 0$  har karakterligningen  $R^2 - 6R + 9 = 0$  med dobbeltroden 3.
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{3t}$  løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Men vi mangler en anden.
- ▶ En anden er  $\phi_2(t) = te^{3t}$ , hvilket ses ved simpel indsættelse.
- ▶ Wronskideterminanten er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0$$

- ▶ Så den fuldstændige løsning er  $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## Den homogene ligning: Eksempel 2

- ▶ Eksempel.  $x'' - 6x' + 9x = 0$  har karakterligningen  $R^2 - 6R + 9 = 0$  med dobbeltroden 3.
- ▶ Altså er  $\phi_1(t) = e^{3t}$  løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 0$ . Men vi mangler en anden.
- ▶ En anden er  $\phi_2(t) = te^{3t}$ , hvilket ses ved simpel indsættelse.
- ▶ Wronskideterminanten er

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0$$

- ▶ Så den fuldstændige løsning er  $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Generelt for dobbeltrod  $r$ . Fuldstændig løsning  $x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

# Den homogene ligning: Eksempel 3

- ▶ Eksempel.  $x'' + 2x' + 5x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 2R + 5 = 0$  med de imaginære rødder  $-1 \pm 2i$ .

# Den homogene ligning: Eksempel 3

- ▶ Eksempel.  $x'' + 2x' + 5x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 2R + 5 = 0$  med de imaginære rødder  $-1 \pm 2i$ .
- ▶ Altså er  $e^{(-1+2i)t}$  og  $e^{(-1-2i)t}$  løsninger. Men de er jo imaginære!

# Den homogene ligning: Eksempel 3

- ▶ Eksempel.  $x'' + 2x' + 5x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 2R + 5 = 0$  med de imaginære rødder  $-1 \pm 2i$ .
- ▶ Altså er  $e^{(-1+2i)t}$  og  $e^{(-1-2i)t}$  løsninger. Men de er jo imaginære!
- ▶ Realdelen  $\phi_1(t) = \operatorname{Re} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \cos(2t)$  og imaginærdelen  $\phi_2(t) = \operatorname{Im} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \sin(2t)$ , er også løsninger!

# Den homogene ligning: Eksempel 3

- ▶ Eksempel.  $x'' + 2x' + 5x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 2R + 5 = 0$  med de imaginære rødder  $-1 \pm 2i$ .
- ▶ Altså er  $e^{(-1+2i)t}$  og  $e^{(-1-2i)t}$  løsninger. Men de er jo imaginære!
- ▶ Realdelen  $\phi_1(t) = \operatorname{Re} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \cos(2t)$  og imaginærdelen  $\phi_2(t) = \operatorname{Im} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \sin(2t)$ , er også løsninger!
- ▶ Wronskideterminanten for disse er 
$$\begin{vmatrix} e^{-t} \cos(2t) & e^{-t} \sin(2t) \\ -e^{-t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) & -e^{-t} (\sin(2t) - 2 \cos(2t)) \end{vmatrix} 2e^{-2t} \neq 0.$$

# Den homogene ligning: Eksempel 3

- ▶ Eksempel.  $x'' + 2x' + 5x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 2R + 5 = 0$  med de imaginære rødder  $-1 \pm 2i$ .
- ▶ Altså er  $e^{(-1+2i)t}$  og  $e^{(-1-2i)t}$  løsninger. Men de er jo imaginære!
- ▶ Realdelen  $\phi_1(t) = \operatorname{Re} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \cos(2t)$  og imaginærdelen  $\phi_2(t) = \operatorname{Im} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \sin(2t)$ , er også løsninger!

- ▶ Wronskideterminanten for disse er

$$\begin{vmatrix} e^{-t} \cos(2t) & e^{-t} \sin(2t) \\ -e^{-t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) & -e^{-t} (\sin(2t) - 2 \cos(2t)) \end{vmatrix} \\ 2e^{-2t} \neq 0.$$

- ▶ Så den fuldstændige løsning er  $x(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t)$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## Den homogene ligning: Eksempel 3

- ▶ Eksempel.  $x'' + 2x' + 5x = 0$  har karakterligningen  $R^2 + 2R + 5 = 0$  med de imaginære rødder  $-1 \pm 2i$ .
- ▶ Altså er  $e^{(-1+2i)t}$  og  $e^{(-1-2i)t}$  løsninger. Men de er jo imaginære!
- ▶ Realdelen  $\phi_1(t) = \operatorname{Re} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \cos(2t)$  og imaginærdelen  $\phi_2(t) = \operatorname{Im} e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \sin(2t)$ , er også løsninger!
- ▶ Wronskideterminanten for disse er 
$$\begin{vmatrix} e^{-t} \cos(2t) & e^{-t} \sin(2t) \\ -e^{-t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) & -e^{-t} (\sin(2t) - 2 \cos(2t)) \end{vmatrix} 2e^{-2t} \neq 0.$$
- ▶ Så den fuldstændige løsning er  $x(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t)$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Generelt for imaginære rødder  $\alpha \pm i\beta$ . Fuldstændig løsning  $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .



# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

- ▶ **Sætning.** Lad  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være løsninger til *Inhomogen*. Så er  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  en løsning til *Homogen*.

# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være løsninger til *Inhomogen*. Så er  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  en løsning til *Homogen*.
- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  være en løsning til *Inhomogen* og  $\phi$  en løsning til *Homogen*. Så er  $\psi_2 = \psi_1 + \phi$  en løsning til *Inhomogen*.

# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være løsninger til *Inhomogen*. Så er  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  en løsning til *Homogen*.
- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  være en løsning til *Inhomogen* og  $\phi$  en løsning til *Homogen*. Så er  $\psi_2 = \psi_1 + \phi$  en løsning til *Inhomogen*.
- ▶ Opskrift på fuldstændige løsning til *Inhomogen*.

# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være løsninger til *Inhomogen*. Så er  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  en løsning til *Homogen*.
- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  være en løsning til *Inhomogen* og  $\phi$  en løsning til *Homogen*. Så er  $\psi_2 = \psi_1 + \phi$  en løsning til *Inhomogen*.
- ▶ Opskrift på fuldstændige løsning til *Inhomogen*.
  1. Find den fuldstændige løsning til *Homogen*. Denne løsning vil indeholde to arbitrære konstanter.

# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være løsninger til *Inhomogen*. Så er  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  en løsning til *Homogen*.
- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  være en løsning til *Inhomogen* og  $\phi$  en løsning til *Homogen*. Så er  $\psi_2 = \psi_1 + \phi$  en løsning til *Inhomogen*.
- ▶ Opskrift på fuldstændige løsning til *Inhomogen*.
  1. Find den fuldstændige løsning til *Homogen*. Denne løsning vil indeholde to arbitrære konstanter.
  2. Find bare én løsning til *Inhomogen*. En sådan løsning kaldes en partikulær løsning til *Inhomogen*.

# Den inhomogene ligning I

- ▶ Vi betragter nu den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

og den tilsvarende homogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (\text{Homogen})$$

- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være løsninger til *Inhomogen*. Så er  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  en løsning til *Homogen*.
- ▶ Sætning. Lad  $\psi_1$  være en løsning til *Inhomogen* og  $\phi$  en løsning til *Homogen*. Så er  $\psi_2 = \psi_1 + \phi$  en løsning til *Inhomogen*.
- ▶ Opskrift på fuldstændige løsning til *Inhomogen*.
  1. Find den fuldstændige løsning til *Homogen*. Denne løsning vil indeholde to arbitrære konstanter.
  2. Find bare én løsning til *Inhomogen*. En sådan løsning kaldes en partikulær løsning til *Inhomogen*.
  3. Den fuldstændige løsning til *Inhomogen* er summen af den fundne partikulære løsning til *Inhomogen* og den fuldstændige løsning til *Homogen*.

# Den inhomogene ligning II

- ▶ Betragt igen den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$



# Den inhomogene ligning II

- ▶ Betragt igen den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

- ▶ Antag, at  $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t)$ .

# Den inhomogene ligning II

- ▶ Betragt igen den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

- ▶ Antag, at  $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t)$ .
- ▶ Antag, at  $\psi_1$  er løsning til  $ax'' + bx' + cx = q_1(t)$ ,  $\psi_2$  løsning til  $ax'' + bx' + cx = q_2(t)$  osv.

# Den inhomogene ligning II

- ▶ Betragt igen den inhomogene ligning

$$ax'' + bx' + cx = q(t) \quad (\text{Inhomogen})$$

- ▶ Antag, at  $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t)$ .
- ▶ Antag, at  $\psi_1$  er løsning til  $ax'' + bx' + cx = q_1(t)$ ,  $\psi_2$  løsning til  $ax'' + bx' + cx = q_2(t)$  osv.
- ▶ **Superpositionsprincippet. Så er  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$  løsning til *Inhomogen*.**

# Eksempel 1

- Vi fandt, at den løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ , der opfylder  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -\frac{4}{5}$  er

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t}$$

# Eksempel 1

- ▶ Vi fandt, at den løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ , der opfylder  $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{4}{5}$  er

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t}$$

- ▶ Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

# Eksempel 1

- ▶ Vi fandt, at den løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ , der opfylder  $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{4}{5}$  er

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t}$$

- ▶ Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Altså er den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \text{ hvor } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

# Eksempel 1

- ▶ Vi fandt, at den løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$ , der opfylder  $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{4}{5}$  er

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t}$$

- ▶ Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Altså er den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + \frac{9}{20} e^{-t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \text{ hvor } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Dette kan skrives mere kompakt som

$$x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, \text{ hvor } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemærk, at  $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$  er en særlig simpel løsning til den inhomogene ligning.

## Eksempel 2

- Betragt differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$ . Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .



## Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$ . Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ En partikulær løsning er  $x(t) = 2t^2 - 6t + 7$ .

## Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$ . Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ En partikulær løsning er  $x(t) = 2t^2 - 6t + 7$ .
- ▶ En partikulær løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$  er  $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$ .

## Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$ . Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ En partikulær løsning er  $x(t) = 2t^2 - 6t + 7$ .
- ▶ En partikulær løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$  er  $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$ .
- ▶ En partikulær løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2 + 20te^{3t}$  er derfor  $x(t) = 2t^2 - 6t + 7 + \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$ .

## Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningen  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2$ . Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ , hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- ▶ En partikulær løsning er  $x(t) = 2t^2 - 6t + 7$ .
- ▶ En partikulær løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 20te^{3t}$  er  $x(t) = \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$ .
- ▶ En partikulær løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2 + 20te^{3t}$  er derfor  $x(t) = 2t^2 - 6t + 7 + \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t}$ .
- ▶ Altså er den fuldstændige løsning til  $x'' + 3x' + 2x = 4t^2 + 20te^{3t}$

$$x(t) = 2t^2 - 6t + 7 + \left(t - \frac{9}{20}\right) e^{3t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

hvor  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .