DesignMat Uge 3
Lineære afbildninger og basisskift

Preben Alsholm

Efterår 2009

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ være en basis for W.

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \rightarrow W$. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineredes sidst ved

$$ {}_cF_a = \begin{bmatrix} K_c\left(f\left(a_1\right)\right) & K_c\left(f\left(a_2\right)\right) & \ldots & K_c\left(f\left(a_n\right)\right) \end{bmatrix} $$

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \dots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineredes sidst ved

$$ {}_cF_a = \begin{bmatrix} K_c\left(f\left(a_1\right)\right) & K_c\left(f\left(a_2\right)\right) & \dots & K_c\left(f\left(a_n\right)\right) \end{bmatrix} $$

- Sætning 6.6. $K_c\left(f\left(v\right)\right) = {}_cF_a \, K_a\left(v\right)$ for alle $v \in V$.

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineredes sidst ved

$$_cF_a = \begin{bmatrix} K_c(f(a_1)) & K_c(f(a_2)) & \ldots & K_c(f(a_n)) \end{bmatrix}$$

- Sætning 6.6. $K_c(f(v)) = {}_cF_a\, K_a(v)$ for alle $v \in V$.
- Lad nu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være en anden basis for V, og lad $d_1, d_2, \ldots, d_m$ være en anden basis for W.

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineredes sidst ved

$$_c F_a = \begin{bmatrix} K_c\left(f\left(a_1\right)\right) & K_c\left(f\left(a_2\right)\right) & \ldots & K_c\left(f\left(a_n\right)\right) \end{bmatrix}$$

- Sætning 6.6. $K_c\left(f\left(v\right)\right) = {}_c F_a \, K_a\left(v\right)$ for alle $v \in V$.
- Lad nu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være en anden basis for V, og lad $d_1, d_2, \ldots, d_m$ være en anden basis for W.
- Vi har naturligvis så $K_d\left(f\left(v\right)\right) = {}_d F_b \, K_b\left(v\right)$ for alle $v \in V$.

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineredes sidst ved

$$ {}_cF_a = \begin{bmatrix} K_c\left(f\left(a_1\right)\right) & K_c\left(f\left(a_2\right)\right) & \ldots & K_c\left(f\left(a_n\right)\right) \end{bmatrix} $$

- Sætning 6.6. $K_c\left(f\left(v\right)\right) = {}_cF_a\, K_a\left(v\right)$ for alle $v \in V$.
- Lad nu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være en anden basis for V, og lad $d_1, d_2, \ldots, d_m$ være en anden basis for W.
- Vi har naturligvis så $K_d\left(f\left(v\right)\right) = {}_dF_b\, K_b\left(v\right)$ for alle $v \in V$.
- Vi får nu for alle $v \in V$:
  ${}_dF_b\, K_b\left(v\right) = K_d\left(f\left(v\right)\right) = {}_dM_c K_c\left(f\left(v\right)\right) =$
  ${}_dM_c\, {}_cF_a\, K_a\left(v\right) = {}_dM_c\, {}_cF_a\, {}_aM_b\, K_b\left(v\right)$.

Matrixfremstilling, basisskift I

- Lad $f : V \to W$. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være en basis for V, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_m$ være en basis for W.
- Afbildningsmatricen for f mht. de givne baser defineredes sidst ved

$$_cF_a = \left[K_c\left(f\left(a_1\right)\right) \quad K_c\left(f\left(a_2\right)\right) \quad \ldots \quad K_c\left(f\left(a_n\right)\right)\right]$$

- Sætning 6.6. $K_c\left(f\left(v\right)\right) = {}_cF_a\, K_a\left(v\right)$ for alle $v \in V$.
- Lad nu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være en anden basis for V, og lad $d_1, d_2, \ldots, d_m$ være en anden basis for W.
- Vi har naturligvis så $K_d\left(f\left(v\right)\right) = {}_dF_b\, K_b\left(v\right)$ for alle $v \in V$.
- Vi får nu for alle $v \in V$:
  ${}_dF_b\, K_b\left(v\right) = K_d\left(f\left(v\right)\right) = {}_dM_c K_c\left(f\left(v\right)\right) = {}_dM_c\, {}_cF_a\, K_a\left(v\right) = {}_dM_c\, {}_cF_a\, {}_aM_b\, K_b\left(v\right)$.
- Heraf følger ${}_dF_b = {}_dM_c\, {}_cF_a\, {}_aM_b$.

Matrixfremstilling, basisskift II

- Lad $f : V \to V$ (altså $W = V$ ovenfor), så har vi specielt med baserne a og b: ${}_bF_b = {}_bM_a\, {}_aF_a\, {}_aM_b$.

Matrixfremstilling, basisskift II

- Lad $f : V \to V$ (altså $W = V$ ovenfor), så har vi specielt med baserne a og b: ${}_bF_b = {}_bM_a\, {}_aF_a\, {}_aM_b$.
- Og dermed

$$ {}_bF_b = \left({}_aM_b\right)^{-1}\; {}_aF_a\; {}_aM_b $$

Matrixfremstilling, basisskift II

- Lad $f : V \to V$ (altså $W = V$ ovenfor), så har vi specielt med baserne a og b: ${}_bF_b = {}_bM_a\,{}_aF_a\,{}_aM_b$.
- Og dermed

$$ {}_bF_b = \left({}_aM_b\right)^{-1}\,{}_aF_a\,{}_aM_b $$

- Eksempel 1. Sidst betragtede vi $D_x : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.

Matrixfremstilling, basisskift II

- Lad $f : V \to V$ (altså $W = V$ ovenfor), så har vi specielt med baserne a og b: ${}_bF_b = {}_bM_a\, {}_aF_a\, {}_aM_b$.
- Og dermed

$$ {}_bF_b = \left({}_aM_b\right)^{-1}\ {}_aF_a\ {}_aM_b $$

- Eksempel 1. Sidst betragtede vi $D_x : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.
- Monomiebasen $(m3)$ i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen $(m2)$ i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.

Matrixfremstilling, basisskift II

- Lad $f : V \to V$ (altså $W = V$ ovenfor), så har vi specielt med baserne a og b: ${}_bF_b = {}_bM_a \, {}_aF_a \, {}_aM_b$.
- Og dermed

$$ {}_bF_b = \left({}_aM_b\right)^{-1} \, {}_aF_a \, {}_aM_b $$

- Eksempel 1. Sidst betragtede vi $D_x : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.
- Monomiebasen $(m3)$ i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen $(m2)$ i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.
- Vi fandt afbildningsmatricen ${}_{m2}F_{m3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Matrixfremstilling, basisskift II

- Lad $f : V \to V$ (altså $W = V$ ovenfor), så har vi specielt med baserne a og b: ${}_bF_b = {}_bM_a\, {}_aF_a\, {}_aM_b$.
- Og dermed

$$ {}_bF_b = \left({}_aM_b\right)^{-1}\ {}_aF_a\, {}_aM_b $$

- Eksempel 1. Sidst betragtede vi $D_x : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ givet ved $D_x(p(x)) = p'(x)$ for alle $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$.
- Monomiebasen $(m3)$ i $P_3(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2, x^3$ og monomiebasen $(m2)$ i $P_2(\mathbb{R})$, altså $1, x, x^2$.
- Vi fandt afbildningsmatricen ${}_{m2}F_{m3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- Vi betragter nu Eulerbasen $(e3)$ $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x, x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ i $P_3(\mathbb{R})$ og Eulerbasen $(e2)$ $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x$ i $P_2(\mathbb{R})$.

Eksempel 1 fortsat

- Eulerbasen $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x, x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ i $P_3(\mathbb{R})$ og Eulerbasen $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x$ i $P_2(\mathbb{R})$.

Eksempel 1 fortsat

- Eulerbasen $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x, x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ i $P_3(\mathbb{R})$ og Eulerbasen $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x$ i $P_2(\mathbb{R})$.
- Basisskiftematricen ${}_{m3}M_{e3}$ er givet ved

$$
{}_{m3}M_{e3} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Eksempel 1 fortsat

- Eulerbasen $1, x-\frac{1}{2}, x^2-x, x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$ i $P_3(\mathbb{R})$ og Eulerbasen $1, x-\frac{1}{2}, x^2-x$ i $P_2(\mathbb{R})$.
- Basisskiftematricen ${}_{m3}M_{e3}$ er givet ved

$$
{}_{m3}M_{e3} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Basisskiftematricen ${}_{m2}M_{e2}$ er givet ved

$$
{}_{m2}M_{e2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Eksempel 1 fortsat

- Eulerbasen $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x, x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ i $P_3(\mathbb{R})$ og Eulerbasen $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x$ i $P_2(\mathbb{R})$.
- Basisskiftematricen ${}_{m3}M_{e3}$ er givet ved

$$ {}_{m3}M_{e3} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Basisskiftematricen ${}_{m2}M_{e2}$ er givet ved

$$ {}_{m2}M_{e2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Hermed er afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$

$$ {}_{e2}F_{e3} = \left({}_{m2}M_{e2}\right)^{-1} \; {}_{m2}F_{m3} \; {}_{m3}M_{e3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} $$

Eksempel 1 fortsat

- Eulerbasen $1, x-\frac{1}{2}, x^2-x, x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$ i $P_3(\mathbb{R})$ og Eulerbasen $1, x-\frac{1}{2}, x^2-x$ i $P_2(\mathbb{R})$.
- Basisskiftematricen ${}_{m3}M_{e3}$ er givet ved

$$
{}_{m3}M_{e3} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Basisskiftematricen ${}_{m2}M_{e2}$ er givet ved

$$
{}_{m2}M_{e2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Hermed er afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$

$$
{}_{e2}F_{e3} = \left({}_{m2}M_{e2}\right)^{-1} {}_{m2}F_{m3} \, {}_{m3}M_{e3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

- Bemærk, at ${}_{e2}F_{e3} = {}_{m2}F_{m3}$ tilfældigvis!

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$ for f mht. de kanoniske baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ er da lig med A.

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$ for f mht. de kanoniske baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ er da lig med A.
- Ny basis a: $(1, 2, 3), (2, 5, 6), (1, 0, 2)$ i $\mathbb{R}^3$.

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$ for f mht. de kanoniske baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ er da lig med A.
- Ny basis a: $(1,2,3), (2,5,6), (1,0,2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Basisskiftematricen ${}_{e3}M_a$ er givet ved

$$ {}_{e3}M_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} $$

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$ for f mht. de kanoniske baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ er da lig med A.
- Ny basis a: $(1,2,3),(2,5,6),(1,0,2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Basisskiftematricen ${}_{e3}M_a$ er givet ved

$$
{}_{e3}M_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}
$$

- Ny basis b: $(2,3),(1,2)$ i $\mathbb{R}^2$.

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$ for f mht. de kanoniske baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ er da lig med A.
- Ny basis a: $(1,2,3), (2,5,6), (1,0,2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Basisskiftematricen ${}_{e3}M_a$ er givet ved

$$ {}_{e3}M_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} $$

- Ny basis b: $(2,3), (1,2)$ i $\mathbb{R}^2$.
- Basisskiftematricen ${}_{e2}M_b$ er givet ved ${}_{e2}M_b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Eksempel 2

- Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(x) = Ax$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Afbildningsmatricen ${}_{e2}F_{e3}$ for f mht. de kanoniske baser i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ er da lig med A.
- Ny basis a: $(1,2,3), (2,5,6), (1,0,2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Basisskiftematricen ${}_{e3}M_a$ er givet ved

$$ {}_{e3}M_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} $$

- Ny basis b: $(2,3), (1,2)$ i $\mathbb{R}^2$.
- Basisskiftematricen ${}_{e2}M_b$ er givet ved ${}_{e2}M_b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
- Hermed er afbildningsmatricen ${}_bF_a$

$$ {}_bF_a = \left({}_{e2}M_b\right)^{-1} {}_{e2}F_{e3} \; {}_{e3}M_a = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 2 \\ 5 & 15 & -3 \end{bmatrix} $$

Similaritet I

- To kvadratiske matricer A og B siges at være *similære* $(A \text{ s } B)$, hvis der findes en regulær matrix M, så $B = M^{-1}AM$.

Similaritet I

- To kvadratiske matricer A og B siges at være *similære* ($A \; s \; B$), hvis der findes en regulær matrix M, så $B = M^{-1}AM$.
- Da $B = M^{-1}AM \Leftrightarrow A = \left(M^{-1}\right)^{-1} B \left(M^{-1}\right)$ gælder $A \; s \; B \Leftrightarrow B \; s \; A$. Similaritetsrelationen er *symmetrisk*.

Similaritet I

- To kvadratiske matricer A og B siges at være *similære* $(A \, s \, B)$, hvis der findes en regulær matrix M, så $B = M^{-1}AM$.
- Da $B = M^{-1}AM \Leftrightarrow A = \left(M^{-1}\right)^{-1} B \left(M^{-1}\right)$ gælder $A \, s \, B \Leftrightarrow B \, s \, A$. Similaritetsrelationen er *symmetrisk*.
- Similaritetsrelationen er *transitiv*: $(A \, s \, B) \wedge (B \, s \, C) \Rightarrow A \, s \, C$ og *refleksiv*: $A \, s \, A$.

Similaritet I

- To kvadratiske matricer A og B siges at være *similære* ($A \, s \, B$), hvis der findes en regulær matrix M, så $B = M^{-1}AM$.
- Da $B = M^{-1}AM \Leftrightarrow A = \left(M^{-1}\right)^{-1} B \left(M^{-1}\right)$ gælder $A \, s \, B \Leftrightarrow B \, s \, A$. Similaritetsrelationen er *symmetrisk*.
- Similaritetsrelationen er *transitiv*: $(A \, s \, B) \wedge (B \, s \, C) \Rightarrow A \, s \, C$ og *refleksiv*: $A \, s \, A$.
- En refleksiv, symmetrisk og transitiv relation kaldes en *ækvivalensrelation*.

Similaritet I

- To kvadratiske matricer A og B siges at være *similære* ($A \; s \; B$), hvis der findes en regulær matrix M, så $B = M^{-1}AM$.
- Da $B = M^{-1}AM \Leftrightarrow A = \left(M^{-1}\right)^{-1} B \left(M^{-1}\right)$ gælder $A \; s \; B \Leftrightarrow B \; s \; A$. Similaritetsrelationen er *symmetrisk*.
- Similaritetsrelationen er *transitiv*: $(A \; s \; B) \wedge (B \; s \; C) \Rightarrow A \; s \; C$ og *refleksiv*: $A \; s \; A$.
- En refleksiv, symmetrisk og transitiv relation kaldes en *ækvivalensrelation*.
- Rækkeækvivalens mellem matricer er også en ækvivalensrelation.

Similaritet I

- To kvadratiske matricer A og B siges at være *similære* ($A \; s \; B$), hvis der findes en regulær matrix M, så $B = M^{-1}AM$.
- Da $B = M^{-1}AM \Leftrightarrow A = \left(M^{-1}\right)^{-1} B \left(M^{-1}\right)$ gælder $A \; s \; B \Leftrightarrow B \; s \; A$. Similaritetsrelationen er *symmetrisk*.
- Similaritetsrelationen er *transitiv*: $(A \; s \; B) \wedge (B \; s \; C) \Rightarrow A \; s \; C$ og *refleksiv*: $A \; s \; A$.
- En refleksiv, symmetrisk og transitiv relation kaldes en *ækvivalensrelation*.
- Rækkeækvivalens mellem matricer er også en ækvivalensrelation.
- I mængden af polynomier er "har de samme rødder" en ækvivalensrelation.

Similaritet II

- Sætning. Lad A og B være $n \times n$-matricer. Så gælder, at $A\ s\ B$ hvis og kun hvis der findes baser a og b i $\mathbb{R}^n$ så A og B er afbildningsmatricer for én og samme afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mht. til basis a og basis b, henholdsvis.

Similaritet II

- Sætning. Lad A og B være $n \times n$-matricer. Så gælder, at $A \; s \; B$ hvis og kun hvis der findes baser a og b i $\mathbb{R}^n$ så A og B er afbildningsmatricer for én og samme afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mht. til basis a og basis b, henholdsvis.
- Bevis. Hvis $A = {}_aF_a$ og $B = {}_bF_b$, så gælder, at $B = {}_bF_b = {}_bM_a \, {}_aF_a \, {}_aM_b = \left({}_aM_b\right)^{-1} \, {}_aF_a \, {}_aM_b$, så $A \; s \; B$.

Similaritet II

- Sætning. Lad A og B være $n \times n$-matricer. Så gælder, at $A \; s \; B$ hvis og kun hvis der findes baser a og b i $\mathbb{R}^n$ så A og B er afbildningsmatricer for én og samme afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mht. til basis a og basis b, henholdsvis.
- Bevis. Hvis $A = {}_aF_a$ og $B = {}_bF_b$, så gælder, at $B = {}_bF_b = {}_bM_a \, {}_aF_a \, {}_aM_b = \left({}_aM_b\right)^{-1} \, {}_aF_a \, {}_aM_b$, så $A \; s \; B$.
- Antag omvendt, at $A \; s \; B$, altså $B = M^{-1}AM$. Lad $f : x \to Ax$ for $x \in \mathbb{R}^n$. Så er afbildningsmatricen for f mht. den kanoniske basis e lig med A: ${}_eF_e = A$.

Similaritet II

- Sætning. Lad A og B være $n \times n$-matricer. Så gælder, at $A\ s\ B$ hvis og kun hvis der findes baser a og b i $\mathbb{R}^n$ så A og B er afbildningsmatricer for én og samme afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mht. til basis a og basis b, henholdsvis.
- Bevis. Hvis $A = {}_aF_a$ og $B = {}_bF_b$, så gælder, at $B = {}_bF_b = {}_bM_a\, {}_aF_a\, {}_aM_b = \left({}_aM_b\right)^{-1}\, {}_aF_a\, {}_aM_b$, så $A\ s\ B$.
- Antag omvendt, at $A\ s\ B$, altså $B = M^{-1}AM$. Lad $f : x \to Ax$ for $x \in \mathbb{R}^n$. Så er afbildningsmatricen for f mht. den kanoniske basis e lig med A: ${}_eF_e = A$.
- Lad basis a bestå af søjlerne i M. Så gælder ${}_eM_a = M$.

Similaritet II

- Sætning. Lad A og B være $n \times n$-matricer. Så gælder, at $A \; s \; B$ hvis og kun hvis der findes baser a og b i $\mathbb{R}^n$ så A og B er afbildningsmatricer for én og samme afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mht. til basis a og basis b, henholdsvis.
- Bevis. Hvis $A = {}_aF_a$ og $B = {}_bF_b$, så gælder, at $B = {}_bF_b = {}_bM_a \, {}_aF_a \, {}_aM_b = ({}_aM_b)^{-1} \, {}_aF_a \, {}_aM_b$, så $A \; s \; B$.
- Antag omvendt, at $A \; s \; B$, altså $B = M^{-1}AM$. Lad $f : x \to Ax$ for $x \in \mathbb{R}^n$. Så er afbildningsmatricen for f mht. den kanoniske basis e lig med A: ${}_eF_e = A$.
- Lad basis a bestå af søjlerne i M. Så gælder ${}_eM_a = M$.
- Altså har vi $B = M^{-1}AM = ({}_eM_a)^{-1} \, {}_eF_e \, {}_eM_a = {}_aM_e \, {}_eF_e \, {}_eM_a = {}_aF_a$.

Similaritet II

- Sætning. Lad A og B være $n \times n$-matricer. Så gælder, at $A \, s \, B$ hvis og kun hvis der findes baser a og b i $\mathbb{R}^n$ så A og B er afbildningsmatricer for én og samme afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mht. til basis a og basis b, henholdsvis.
- Bevis. Hvis $A = {}_aF_a$ og $B = {}_bF_b$, så gælder, at $B = {}_bF_b = {}_bM_a \, {}_aF_a \, {}_aM_b = \left({}_aM_b\right)^{-1} \, {}_aF_a \, {}_aM_b$, så $A \, s \, B$.
- Antag omvendt, at $A \, s \, B$, altså $B = M^{-1}AM$. Lad $f : x \to Ax$ for $x \in \mathbb{R}^n$. Så er afbildningsmatricen for f mht. den kanoniske basis e lig med A: ${}_eF_e = A$.
- Lad basis a bestå af søjlerne i M. Så gælder ${}_eM_a = M$.
- Altså har vi $B = M^{-1}AM = \left({}_eM_a\right)^{-1} \, {}_eF_e \, {}_eM_a = {}_aM_e \, {}_eF_e \, {}_eM_a = {}_aF_a$.
- I Jens Eisings bog er sætning og definition ombyttet.

Isomorfi

- En bijektiv lineær afbildning af et vektorrum V på et vektorrum W kaldes en *isomorfi*.

Isomorfi

- En bijektiv lineær afbildning af et vektorrum V på et vektorrum W kaldes en *isomorfi*.
- Hvis der eksisterer en isomorfi $f : V \to W$, så siges V og W at være *isomorfe*.

Isomorfi

- En bijektiv lineær afbildning af et vektorrum V på et vektorrum W kaldes en *isomorfi*.
- Hvis der eksisterer en isomorfi $f : V \to W$, så siges V og W at være *isomorfe*.
- Ethvert n-dimensionalt reelt vektorrum V er isomorf med $\mathbb{R}^n$.

Isomorfi

- En bijektiv lineær afbildning af et vektorrum V på et vektorrum W kaldes en *isomorfi*.
- Hvis der eksisterer en isomorfi $f : V \to W$, så siges V og W at være *isomorfe*.
- Ethvert n-dimensionalt reelt vektorrum V er isomorf med $\mathbb{R}^n$.
- Bevis. Vælg en basis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i V. Koordinatafbildningen $K_a : V \to \mathbb{R}^n$ er en isomorfi.

Isomorfi

- En bijektiv lineær afbildning af et vektorrum V på et vektorrum W kaldes en *isomorfi*.
- Hvis der eksisterer en isomorfi $f : V \to W$, så siges V og W at være *isomorfe*.
- Ethvert n-dimensionalt reelt vektorrum V er isomorf med $\mathbb{R}^n$.
- Bevis. Vælg en basis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i V. Koordinatafbildningen $K_a : V \to \mathbb{R}^n$ er en isomorfi.
- Ethvert n-dimensionalt komplekst vektorrum V er isomorf med $\mathbb{C}^n$.