

DesignMat Uge 5

Systemer af lineære differentialligninger I

Preben Alsholm

Efterår 2009

- Et lineært og homogent system af n differentiallygninger med n ubekendte funktioner x_1, x_2, \dots, x_n af første orden og med konstante koefficienter kan skrives på formen

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)$$

Lineært differentiallygningsystem af første orden

- ▶ Et lineært og homogent system af n differentiallygninger med n ubekendte funktioner x_1, x_2, \dots, x_n af første orden og med konstante koefficienter kan skrives på formen

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)$$

- ▶ Vi skal antage, at alle koefficienterne a_{ij} er reelle.

Lineært differentiallyigningssystem af første orden

- ▶ Et lineært og homogent system af n differentiallyigninger med n ubekendte funktioner x_1, x_2, \dots, x_n af første orden og med konstante koefficienter kan skrives på formen

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)$$

- ▶ Vi skal antage, at alle koefficienterne a_{ij} er reelle.
- ▶ Lad A være matricen af koefficienter

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lineært differentialligningssystem af første orden

II

► Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Lineært differentialligningssystem af første orden

II

▶ Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

▶ Systemet kan nu skrives

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Lineært differentialligningssystem af første orden

II

- ▶ Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.
- ▶ Systemet kan nu skrives

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- ▶ Tit lader man den uafhængige variable t være underforstået og skriver blot $\dot{x} = Ax$.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Lineært differentialsystem af første orden

II

- ▶ Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.
- ▶ Systemet kan nu skrives

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- ▶ Tit lader man den uafhængige variable t være underforstået og skriver blot $\dot{x} = Ax$.
- ▶ Vi kan naturligvis let løse systemet, når $n = 1$. Systemet består blot af en enkelt differentialligning med én ubekendt funktion $\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t)$.

Lineært differentiaalligningssystem af første orden

II

- ▶ Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.
- ▶ Systemet kan nu skrives

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- ▶ Tit lader man den uafhængige variable t være underforstået og skriver blot $\dot{x} = Ax$.
- ▶ Vi kan naturligvis let løse systemet, når $n = 1$. Systemet består blot af en enkelt differentialligning med én ubekendt funktion $\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t)$.
- ▶ eller enklere: $\dot{x}(t) = ax(t)$. Løsning: $x(t) = Ce^{at}$, hvor C er en arbitrær reel konstant.

Lineære
differentiaalligningssystemer

Lineært differentiaalligningssystem af første orden I

Lineært differentiaalligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Lineært differentiallygningsystem af første orden

II

- ▶ Lad $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.
- ▶ Systemet kan nu skrives

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- ▶ Tit lader man den uafhængige variable t være underforstået og skriver blot $\dot{x} = Ax$.
- ▶ Vi kan naturligvis let løse systemet, når $n = 1$. Systemet består blot af en enkelt differentiallygning med én ubekendt funktion $\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t)$.
- ▶ eller enklere: $\dot{x}(t) = ax(t)$. Løsning: $x(t) = Ce^{at}$, hvor C er en arbitrær reel konstant.
- ▶ Så let går det ikke, når $n > 1$, bortset fra det specielle tilfælde, hvor A er en diagonalmatrix.

Lineære
differentiallygnings-
systemerLineært differentiallygnings-
system af
første orden ILineært differentiallygnings-
system af
første orden II

Afblobing I

Afblobing II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat
II)Eksempel 2 (fortsat
III)

Afkobling I

- ▶ Antag nu, at A er diagonaliserbar med $\Lambda = V^{-1}AV$ diagonal, $\Lambda = \text{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ og $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

Afkobling I

- ▶ Antag nu, at A er diagonaliserbar med $\Lambda = V^{-1}AV$ diagonal, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ og $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.
- ▶ Så fås $A = V\Lambda V^{-1}$ og systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ kan skrives

$$\dot{x}(t) = V\Lambda V^{-1}x(t)$$

Afkobling I

- ▶ Antag nu, at A er diagonaliserbar med $\Lambda = V^{-1}AV$ diagonal, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ og $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

- ▶ Så fås $A = V\Lambda V^{-1}$ og systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ kan skrives

$$\dot{x}(t) = V\Lambda V^{-1}x(t)$$

- ▶ Definér en ny vektorfunktion y ved $y(t) = V^{-1}x(t)$.

Afkobling I

- ▶ Antag nu, at A er diagonaliserbar med $\Lambda = V^{-1}AV$ diagonal, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ og $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

- ▶ Så fås $A = V\Lambda V^{-1}$ og systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ kan skrives

$$\dot{x}(t) = V\Lambda V^{-1}x(t)$$

- ▶ Definér en ny vektorfunktion y ved $y(t) = V^{-1}x(t)$.

- ▶ Så fås

$$\dot{y}(t) = \Lambda y(t)$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differential-ligningssystem af første orden I

Lineært differential-ligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Afkobling I

- ▶ Antag nu, at A er diagonaliserbar med $\Lambda = V^{-1}AV$ diagonal, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ og $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

- ▶ Så fås $A = V\Lambda V^{-1}$ og systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ kan skrives

$$\dot{x}(t) = V\Lambda V^{-1}x(t)$$

- ▶ Definér en ny vektorfunktion y ved $y(t) = V^{-1}x(t)$.

- ▶ Så fås

$$\dot{y}(t) = \Lambda y(t)$$

- ▶ Dette system er *afkoblet*:

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t)$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Afkobling II

- ▶ Det afkoblede system har den fuldstændige løsning

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Afkobling II

- ▶ Det afkoblede system har den fuldstændige løsning

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, \dots, c_n er arbitrære konstanter.

Afkobling II

- ▶ Det afkoblede system har den fuldstændige løsning

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, \dots, c_n er arbitrære konstanter.
- ▶ Husk, at egenverdierne eventuelt kunne være komplekse!

Afkobling II

- ▶ Det afkoblede system har den fuldstændige løsning

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, \dots, c_n er arbitrære konstanter.
- ▶ Husk, at egenverdierne eventuelt kunne være komplekse!
- ▶ Heraf fås

$$\begin{aligned} x(t) &= Vy(t) = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \end{aligned}$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1

- Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t)$$

Eksempel 1

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

- ▶ Vi fandt sidst egenverdierne for A til -2 (algebraisk multiplicitet 2) og 1 .

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi fandt sidst egenværdierne for A til -2 (algebraisk multiplicitet 2) og 1 .
- ▶ Basis for egenrummet hørende til -2 er (v_1, v_2) , hvor $v_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$ og $v_2 = [1 \ 0 \ 1]^T$.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.
- ▶ Vi fandt sidst egenværdierne for A til -2 (algebraisk multiplicitet 2) og 1 .
- ▶ Basis for egenrummet hørende til -2 er (v_1, v_2) , hvor $v_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$ og $v_2 = [1 \ 0 \ 1]^T$.
- ▶ En basis for egenrummet hørende til egenværdien 1 er (v_3) , hvor $v_3 = [1 \ 1 \ 3]^T$.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkløbing I

Afkløbing II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) + 3x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$.

- ▶ Vi fandt sidst egenværdierne for A til -2 (algebraisk multiplicitet 2) og 1 .
- ▶ Basis for egenrummet hørende til -2 er (v_1, v_2) , hvor $v_1 = [-1 \ 1 \ 0]^T$ og $v_2 = [1 \ 0 \ 1]^T$.
- ▶ En basis for egenrummet hørende til egenværdien 1 er (v_3) , hvor $v_3 = [1 \ 1 \ 3]^T$.
- ▶ Vi konstaterer, at A er diagonaliserbar.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkløbing I

Afkløbing II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1 (fortsat)

- Den fuldstændige løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3\end{aligned}$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1 (fortsat)

- ▶ Den fuldstændige løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3\end{aligned}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære konstanter og hvor vektorerne v_1, v_2, v_3 er fundet ovenfor.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1 (fortsat)

- Den fuldstændige løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3 \end{aligned}$$

- hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære konstanter og hvor vektorerne v_1, v_2, v_3 er fundet ovenfor.
- **Antag nu, at begyndelsesværdier var givet til $x_1(0) = 7, x_2(0) = 9, x_3(0) = 13$. Så har vi med $c = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$**

$$x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = Vc$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 1 (fortsat)

- Den fuldstændige løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3 \end{aligned}$$

- hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære konstanter og hvor vektorerne v_1, v_2, v_3 er fundet ovenfor.
- Antag nu, at begyndelsesværdier var givet til $x_1(0) = 7, x_2(0) = 9, x_3(0) = 13$. Så har vi med $c = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = Vc$$

- Så c er løsning til $Vc = x_0$. Kan løses ved Gausselimination eller ved $c = V^{-1}x_0$.

Eksempel 1 (fortsat)

- Den fuldstændige løsning til systemet $\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3 \end{aligned}$$

- hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære konstanter og hvor vektorerne v_1, v_2, v_3 er fundet ovenfor.
- Antag nu, at begyndelsesværdier var givet til $x_1(0) = 7, x_2(0) = 9, x_3(0) = 13$. Så har vi med $c = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = Vc$$

- Så c er løsning til $Vc = x_0$. Kan løses ved Gausselimination eller ved $c = V^{-1}x_0$.
- Man finder $c = [12 \ 22 \ -3]^T$, så

$$x(t) = 12e^{-2t} v_1 + 22e^{-2t} v_2 - 3e^t v_3$$

Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t)$$

Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 40 & -13 & 10 \\ -40 & 14 & -5 \end{bmatrix}.$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 40 & -13 & 10 \\ -40 & 14 & -5 \end{bmatrix}.$$

- ▶ **Egenverdierne for A findes til -3 og $-1 \pm 2i$. Matricen er diagonaliserbar (indenfor \mathbb{C} !).**

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 40 & -13 & 10 \\ -40 & 14 & -5 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Egenverdierne for A findes til -3 og $-1 \pm 2i$. Matricen er diagonaliserbar (indenfor \mathbb{C} !).
- ▶ Basis for egenrummet hørende til -3 udgøres af $v_1 = [3 \ 8 \ -4]^T$.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 40 & -13 & 10 \\ -40 & 14 & -5 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Egenverdierne for A findes til -3 og $-1 \pm 2i$. Matricen er diagonaliserbar (indenfor \mathbb{C} !).
- ▶ Basis for egenrummet hørende til -3 udgøres af $v_1 = [3 \ 8 \ -4]^T$.
- ▶ Basis for egenrummet hørende til $-1 + 2i$ udgøres af $v_2 = [4 + 2i \ 10 + 5i \ -5]^T$.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afbløbing I

Afbløbing II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2

- ▶ Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1(t) = 13x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 13x_2(t) + 10x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -40x_1(t) + 14x_2(t) - 5x_3(t)$$

- ▶ Dette kan skrives $\dot{x} = Ax$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 40 & -13 & 10 \\ -40 & 14 & -5 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Egenverdierne for A findes til -3 og $-1 \pm 2i$. Matricen er diagonaliserbar (indenfor \mathbb{C} !).
- ▶ Basis for egenrummet hørende til -3 udgøres af $v_1 = [3 \ 8 \ -4]^T$.
- ▶ Basis for egenrummet hørende til $-1 + 2i$ udgøres af $v_2 = [4 + 2i \ 10 + 5i \ -5]^T$.
- ▶ Basis for egenrummet hørende til $-1 - 2i$ udgøres af $v_3 = \overline{v_2} = [4 - 2i \ 10 - 5i \ -5]^T$.

Eksempel 2 (fortsat I)

- Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet

$\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3\end{aligned}$$

Eksempel 2 (fortsat I)

- ▶ Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet

$\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3\end{aligned}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære komplekse(!) konstanter.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2 (fortsat I)

- ▶ Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet

$\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3\end{aligned}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære komplekse(!) konstanter.
- ▶ Da matricen A har reelle elementer vil systemet $\dot{x} = Ax$ også have reelle løsninger.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2 (fortsat I)

- ▶ Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet

$\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3\end{aligned}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære komplekse(!) konstanter.
- ▶ Da matricen A har reelle elementer vil systemet $\dot{x} = Ax$ også have reelle løsninger.
- ▶ Hvis $x(t)$ er en kompleks løsning, vil $\overline{x(t)}$ også være en løsning.

Eksempel 2 (fortsat I)

- ▶ Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet

$\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3\end{aligned}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære komplekse(!) konstanter.
- ▶ Da matricen A har reelle elementer vil systemet $\dot{x} = Ax$ også have reelle løsninger.
- ▶ Hvis $x(t)$ er en kompleks løsning, vil $\overline{x(t)}$ også være en løsning.
- ▶ Men så er $\operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2} (x(t) + \overline{x(t)})$ og $\operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i} (x(t) - \overline{x(t)})$ begge reelle løsninger.

Eksempel 2 (fortsat I)

- ▶ Den fuldstændige *komplekse* løsning til systemet

$\dot{x} = Ax$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 e^{(-1+2i)t} v_2 + c_3 e^{(-1-2i)t} v_3 \end{aligned}$$

- ▶ hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære komplekse(!) konstanter.
- ▶ Da matricen A har reelle elementer vil systemet $\dot{x} = Ax$ også have reelle løsninger.
- ▶ Hvis $x(t)$ er en kompleks løsning, vil $\overline{x(t)}$ også være en løsning.
- ▶ Men så er $\operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2} (x(t) + \overline{x(t)})$ og $\operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i} (x(t) - \overline{x(t)})$ begge reelle løsninger.
- ▶ Da $e^{(-1+2i)t} v_2$ er løsning er altså også $\operatorname{Re} (e^{(-1+2i)t} v_2)$ og $\operatorname{Im} (e^{(-1+2i)t} v_2)$ løsninger.

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2 (fortsat II)

► Vi finder $e^{(-1+2i)t} v_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} (4+2i)e^{2it} \\ (10+5i)e^{2it} \\ -5e^{2it} \end{bmatrix} =$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \cos 2t - 2 \sin 2t + i(4 \sin 2t + 2 \cos 2t) \\ 10 \cos 2t - 5 \sin 2t + i(10 \sin 2t + 5 \cos 2t) \\ -5 \cos 2t - 5i \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Eksempel 2 (fortsat II)

► Vi finder $e^{(-1+2i)t} \mathbf{v}_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} (4+2i)e^{2it} \\ (10+5i)e^{2it} \\ -5e^{2it} \end{bmatrix} =$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \cos 2t - 2 \sin 2t + i(4 \sin 2t + 2 \cos 2t) \\ 10 \cos 2t - 5 \sin 2t + i(10 \sin 2t + 5 \cos 2t) \\ -5 \cos 2t - 5i \sin 2t \end{bmatrix}.$$

► Altså er to reelle løsninger $w_2(t)$ og $w_3(t)$ givet ved

$$w_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \cos 2t - 2 \sin 2t \\ 10 \cos 2t - 5 \sin 2t \\ -5 \cos 2t \end{bmatrix}, w_3(t) =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \sin 2t + 2 \cos 2t \\ 10 \sin 2t + 5 \cos 2t \\ -5 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Eksempel 2 (fortsat III)

- ▶ Da enhver *kompleks* løsning kan skrives som den *komplekse* linearkombination:

$$c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t)$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2 (fortsat III)

- ▶ Da enhver *kompleks* løsning kan skrives som den *komplekse* linearkombination:

$$c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t)$$

- ▶ og da $e^{-3t} v_1, w_2(t), w_3(t)$ er reelle, vil den fuldstændige *reelle* løsning være den *reelle* linearkombination

$$x(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t) =$$

$$c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \cos 2t - 2 \sin 2t \\ 10 \cos 2t - 5 \sin 2t \\ -5 \cos 2t \end{bmatrix} +$$

$$c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \sin 2t + 2 \cos 2t \\ 10 \sin 2t + 5 \cos 2t \\ -5 \sin 2t \end{bmatrix}$$

Lineære
differentialligningssystemer

Lineært differentialligningssystem af første orden I

Lineært differentialligningssystem af første orden II

Afkobling I

Afkobling II

Eksempel 1

Eksempel 1 (fortsat)

Eksempel 2

Eksempel 2 (fortsat I)

Eksempel 2 (fortsat II)

Eksempel 2 (fortsat III)

Eksempel 2 (fortsat III)

- Da enhver *kompleks* løsning kan skrives som den *komplekse* linearkombination:

$$c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t)$$

- og da $e^{-3t} v_1, w_2(t), w_3(t)$ er reelle, vil den fuldstændige *reelle* løsning være den *reelle* linearkombination

$$x(t) = c_1 e^{-3t} v_1 + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t) =$$

$$c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \cos 2t - 2 \sin 2t \\ 10 \cos 2t - 5 \sin 2t \\ -5 \cos 2t \end{bmatrix} +$$

$$c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \sin 2t + 2 \cos 2t \\ 10 \sin 2t + 5 \cos 2t \\ -5 \sin 2t \end{bmatrix}$$

- Vi har nemlig, at $x(0) = c_1 v_1 + c_2 w_2(0) + c_3 w_3(0) = c_1 v_1 + c_2 \operatorname{Re} v_2 + c_3 \operatorname{Im} v_2$, som ikke kan være reel uden at c_1, c_2, c_3 er reelle, idet $v_1, \operatorname{Re} v_2, \operatorname{Im} v_2$ er lineært uafhængige.