DesignMat Uge 6
Systemer af lineære differentialligninger II

Preben Alsholm

Efterår 2009

Lineært differentialligningssystem af første orden

- Vi betragtede sidst et lineært og homogent system af n differentialligninger af første orden på formen

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{aligned}
$$

Lineært differentialligningssystem af første orden

- Vi betragtede sidst et lineært og homogent system af n differentialligninger af første orden på formen

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{aligned}
$$

- Alle koefficienterne a_{ij} antoges at være reelle konstanter.

Lineært differentialligningssystem af første orden

- Vi betragtede sidst et lineært og homogent system af n differentialligninger af første orden på formen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{aligned}$$

- Alle koefficienterne a_{ij} antoges at være reelle konstanter.
- Systemet kan skrives $\dot{x}(t) = Ax(t)$, når A og $x(t)$ er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Omskrivning af n'te ordens differentialligning til system af første orden

- Betragt en normeret lineær differentialligning af n'te orden

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = q\left(t\right)$$

Omskrivning af n'te ordens differentialligning til system af første orden

- Betragt en normeret lineær differentialligning af n'te orden

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = q\left(t\right)$$

- Sæt $x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}$ så fås systemet

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1\left(t\right) &= x_2\left(t\right)\\
\dot{x}_2\left(t\right) &= x_3\left(t\right)\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}\left(t\right) &= x_n\left(t\right)\\
\dot{x}_n\left(t\right) &= -a_0 x_1\left(t\right) - a_1 x_2\left(t\right) - \cdots - a_{n-1} x_n\left(t\right) + q\left(t\right)
\end{aligned}$$

med koefficientmatrix på næste side.

Omskrivningen fortsat

- $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ q(t)\end{bmatrix}$$

Omskrivningen fortsat

- $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{bmatrix}$$
- Maple-eksempler.

Omskrivning af system af koblede n'te ordens differentialligning til system af første orden

- Betragt eksempelvis et koblet system af to lineære differentialligninger af 2. orden:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + b_1 y_2' + a_0 y_1 + b_0 y_2 &= q_1(t) \\ y_2'' + c_1 y_1' + d_1 y_2' + c_0 y_1 + d_0 y_2 &= q_2(t) \end{aligned}$$

Omskrivning af system af koblede n'te ordens differentialligning til system af første orden

- Betragt eksempelvis et koblet system af to lineære differentialligninger af 2. orden:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + b_1 y_2' + a_0 y_1 + b_0 y_2 &= q_1(t) \\ y_2'' + c_1 y_1' + d_1 y_2' + c_0 y_1 + d_0 y_2 &= q_2(t) \end{aligned}$$

- Sæt $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ så fås systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_1 x_3 - b_1 x_4 - a_0 x_1 - b_0 x_2 + q_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -c_1 x_3 - d_1 x_4 - c_0 x_1 - d_0 x_2 + q_2(t) \end{aligned}$$

med koefficientmatrix på næste side.

Omskrivning af system af koblede n'te ordens differentialligning til system af første orden

- Betragt eksempelvis et koblet system af to lineære differentialligninger af 2. orden:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + b_1 y_2' + a_0 y_1 + b_0 y_2 &= q_1(t) \\ y_2'' + c_1 y_1' + d_1 y_2' + c_0 y_1 + d_0 y_2 &= q_2(t) \end{aligned}$$

- Sæt $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ så fås systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_1 x_3 - b_1 x_4 - a_0 x_1 - b_0 x_2 + q_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -c_1 x_3 - d_1 x_4 - c_0 x_1 - d_0 x_2 + q_2(t) \end{aligned}$$

  med koefficientmatrix på næste side.
- Man kunne i stedet have valgt en anden organisering, f.eks. $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$.

Omskrivningen fortsat

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -b_0 & -a_1 & -b_1 \\ -c_0 & -d_0 & -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Omskrivningen fortsat

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -b_0 & -a_1 & -b_1 \\ -c_0 & -d_0 & -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$ fås i stedet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -d_0 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \\ 0 \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Omskrivningen fortsat

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1', x_4 = y_2'$ fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -b_0 & -a_1 & -b_1 \\ -c_0 & -d_0 & -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

- Med valget $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad x_3 = y_2, \quad , x_4 = y_2'$ fås i stedet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -d_0 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \\ 0 \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

- Maple-eksempler.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) bestående af egenvektorer for A.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) bestående af egenvektorer for A.
- Skriv $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) på formen $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) bestående af egenvektorer for A.
- Skriv $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) på formen $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$.
- Så fås $p(A)x = c_1 p(A) v_1 + \cdots + c_n p(A) v_n = c_1 p(\lambda_1) v_1 + \cdots + c_n p(\lambda_n) v_n = 0$.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) bestående af egenvektorer for A.
- Skriv $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) på formen $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$.
- Så fås $p(A)x = c_1 p(A) v_1 + \cdots + c_n p(A) v_n = c_1 p(\lambda_1) v_1 + \cdots + c_n p(\lambda_n) v_n = 0$.
- Men hvis en kvadratisk matrix B opfylder $Bx = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$), så gælder $B = 0$.

Cayley-Hamiltons sætning

- Lad A være en $n \times n$-matrix og lad $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Så gælder, at $p(A) = 0$.
- Bevis. For et generelt bevis se sætning 7.19, p. 218 i LA.
- Er A diagonaliserbar, kan sætningen let bevises:
- Lad $v_1, v_2, \ldots, v_n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) bestående af egenvektorer for A.
- Skriv $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) på formen $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$.
- Så fås $p(A)x = c_1 p(A) v_1 + \cdots + c_n p(A) v_n = c_1 p(\lambda_1) v_1 + \cdots + c_n p(\lambda_n) v_n = 0$.
- Men hvis en kvadratisk matrix B opfylder $Bx = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$), så gælder $B = 0$.
- Altså har vi $p(A) = 0$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^kx$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^k x$.
- Derfor gælder, at $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = p(A)x = 0$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^k x$.
- Derfor gælder, at $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = p(A)x = 0$.
- Altså løser hver af komponenterne x_i af x differentialligningen $p\left(\frac{d}{dt}\right)x_i = 0$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^k x$.
- Derfor gælder, at $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = p(A)x = 0$.
- Altså løser hver af komponenterne x_i af x differentialligningen $p\left(\frac{d}{dt}\right)x_i = 0$.
- Så $-x_i''' - 3x_i'' + 4x_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^kx$.
- Derfor gælder, at $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = p(A)x = 0$.
- Altså løser hver af komponenterne x_i af x differentialligningen $p\left(\frac{d}{dt}\right)x_i = 0$.
- Så $-x_i''' - 3x_i'' + 4x_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$.
- Karakterligningens rødder er -2 (alg. mult. 2) og 1.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning I

- Eksempel. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix}$. Karakterpolynomiet er $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.
- Cayley-Hamilton giver, at $p(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$.
- Hvis $\dot{x} = Ax$ har vi $\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}Ax = A\frac{d}{dt}x = A\dot{x} = A^2x$ og generelt $\frac{d^k}{dt^k}x = A^kx$.
- Derfor gælder, at $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = p(A)x = 0$.
- Altså løser hver af komponenterne x_i af x differentialligningen $p\left(\frac{d}{dt}\right)x_i = 0$.
- Så $-x_i''' - 3x_i'' + 4x_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$.
- Karakterligningens rødder er -2 (alg. mult. 2) og 1.
- Så $x_i(t) = c_{i1}e^t + c_{i2}e^{-2t} + c_{i3}te^{-2t}$, hvor konstanterne for forskellige værdier af i afhænger af hinanden.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning II

- Da vores A er diagonaliserbar, må $c_{i3} = 0$, så $x_i(t) = c_{i1}e^t + c_{i2}e^{-2t}$.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning II

- Da vores A er diagonaliserbar, må $c_{i3} = 0$, så $x_i(t) = c_{i1}e^t + c_{i2}e^{-2t}$.
- Indsættelse i $\dot{x} = Ax$:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} c_{11}e^t + c_{12}e^{-2t} \\ c_{21}e^t + c_{22}e^{-2t} \\ c_{31}e^t + c_{32}e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e^t - 2c_{12}e^{-2t} \\ c_{21}e^t - 2c_{22}e^{-2t} \\ c_{31}e^t - 2c_{32}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} e^t(-5c_{11} - 3c_{21} + 3c_{31}) + e^{-2t}(-5c_{12} - 3c_{22} + 3c_{32}) \\ e^t(-3c_{11} - 5c_{21} + 3c_{31}) + e^{-2t}(-3c_{12} - 5c_{22} + 3c_{32}) \\ e^t(-9c_{11} - 9c_{21} + 7c_{31}) + e^{-2t}(-9c_{12} - 9c_{22} + 7c_{32}) \end{bmatrix}$$

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning II

- Da vores A er diagonaliserbar, må $c_{i3} = 0$, så $x_i(t) = c_{i1}e^t + c_{i2}e^{-2t}$.
- Indsættelse i $\dot{x} = Ax$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} c_{11}e^t + c_{12}e^{-2t} \\ c_{21}e^t + c_{22}e^{-2t} \\ c_{31}e^t + c_{32}e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e^t - 2c_{12}e^{-2t} \\ c_{21}e^t - 2c_{22}e^{-2t} \\ c_{31}e^t - 2c_{32}e^{-2t} \end{bmatrix} \\
Ax &= \begin{bmatrix} e^t(-5c_{11} - 3c_{21} + 3c_{31}) + e^{-2t}(-5c_{12} - 3c_{22} + 3c_{32}) \\ e^t(-3c_{11} - 5c_{21} + 3c_{31}) + e^{-2t}(-3c_{12} - 5c_{22} + 3c_{32}) \\ e^t(-9c_{11} - 9c_{21} + 7c_{31}) + e^{-2t}(-9c_{12} - 9c_{22} + 7c_{32}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Ud af dette fås 6 lineære ligninger med 6 ubekendte.

Anvendelse af Cayley-Hamiltons sætning II

- Da vores A er diagonaliserbar, må $c_{i3} = 0$, så $x_i(t) = c_{i1}e^t + c_{i2}e^{-2t}$.
- Indsættelse i $\dot{x} = Ax$:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} c_{11}e^t + c_{12}e^{-2t} \\ c_{21}e^t + c_{22}e^{-2t} \\ c_{31}e^t + c_{32}e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e^t - 2c_{12}e^{-2t} \\ c_{21}e^t - 2c_{22}e^{-2t} \\ c_{31}e^t - 2c_{32}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} e^t(-5c_{11} - 3c_{21} + 3c_{31}) + e^{-2t}(-5c_{12} - 3c_{22} + 3c_{32}) \\ e^t(-3c_{11} - 5c_{21} + 3c_{31}) + e^{-2t}(-3c_{12} - 5c_{22} + 3c_{32}) \\ e^t(-9c_{11} - 9c_{21} + 7c_{31}) + e^{-2t}(-9c_{12} - 9c_{22} + 7c_{32}) \end{bmatrix}$$

- Ud af dette fås 6 lineære ligninger med 6 ubekendte.
- Som det ses, er det absolut ikke den simpleste metode til løsning af $\dot{x} = Ax$. Brug egenværdier og egenvektorer for A!

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.
- Er A diagonaliserbar, så er det minimale polynomium $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_k - \lambda)$, hvor egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er indbyrdes forskellige.

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.
- Er A diagonaliserbar, så er det minimale polynomium $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda)$, hvor egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er indbyrdes forskellige.
- I eksemplet ovenfor fandt vi $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.
- Er A diagonaliserbar, så er det minimale polynomium $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda)$, hvor egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er indbyrdes forskellige.
- I eksemplet ovenfor fandt vi $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.
- Da A viste sig at være diagonaliserbar, er det minimale polynomium $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2) = -\lambda^2 - \lambda + 2$.

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.
- Er A diagonaliserbar, så er det minimale polynomium $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda)$, hvor egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er indbyrdes forskellige.
- I eksemplet ovenfor fandt vi $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.
- Da A viste sig at være diagonaliserbar, er det minimale polynomium $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2) = -\lambda^2 - \lambda + 2$.
- Dette betyder altså, at $-A^2 - A + 2I = 0$.

Det minimale polynomium for en matrix

- *Det minimale polynomium* for en kvadratisk matrix A er det ikke-trivielle polynomium p af mindst mulig grad for hvilket det gælder, at $p(A) = 0$.
- Er egenværdierne for A alle simple, så er det minimale polynomium identisk med karakterpolynomiet.
- Er A diagonaliserbar, så er det minimale polynomium $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda)$, hvor egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er indbyrdes forskellige.
- I eksemplet ovenfor fandt vi $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.
- Da A viste sig at være diagonaliserbar, er det minimale polynomium $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2) = -\lambda^2 - \lambda + 2$.
- Dette betyder altså, at $-A^2 - A + 2I = 0$.
- Komponenterne til løsningerne til $\dot{x} = Ax$ opfylder dermed alle differentialligningen $-x_i'' - x_i' + 2x_i = 0$.