

Norm og

skalarprodukt i \mathbb{R}^k

Punktmængder i \mathbb{R}^k :

Definitioner

Funktion af flere
variable: Definitioner

Grænseværdi,

definition og

Eksempel 1 (p. 28)

Grænseværdi,

Eksempel 4 (p. 29)

Grænseværdi,

Eksempel 2 (p. 28)

Kontinuitet,

Definition

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
I

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
II

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
III

Funktion af flere variable I Uge 8

Preben Alsholm

Efterår 2009

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k.$$

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k.$$

- ▶ Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}.$$

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :
 $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k.$
- ▶ Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er
 $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}.$
- ▶ Der gælder $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :
 $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k.$
- ▶ Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er
 $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}.$
- ▶ Der gælder $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- ▶ For $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^k$ gælder at $\|tx\| = |t| \|x\|.$

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :
 $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k.$
- ▶ Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er
 $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}.$
- ▶ Der gælder $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- ▶ For $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^k$ gælder at $\|tx\| = |t| \|x\|.$
- ▶ *Trekantsuligheden* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :
 $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k.$
- ▶ Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er
 $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}.$
- ▶ Der gælder $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- ▶ For $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^k$ gælder at $\|tx\| = |t| \|x\|.$
- ▶ *Trekantsuligheden* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
- ▶ **Bevis: Vi udnytter Cauchy-Schwarz' ulighed:**
 $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ (fra sidste uge).

Norm og skalarprodukt

- ▶ Det sædvanlige skalarprodukt i \mathbb{R}^k :

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k.$$

- ▶ Den sædvanlige *norm* af $x \in \mathbb{R}^k$ er

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}.$$

- ▶ Der gælder $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- ▶ For $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^k$ gælder at $\|tx\| = |t| \|x\|$.

- ▶ *Trekantsuligheden* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- ▶ Bevis: Vi udnytter Cauchy-Schwarz' ulighed:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\| \text{ (fra sidste uge).}$$

- ▶ Vi finder

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Punktmængder i flerdimensionale rum: Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$

Punktmængder i flerdimensionale rum:

Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$
- ▶ z er et *indre punkt* i mængden A hvis $\exists r > 0$ så
 $K(z, r) \subset A.$

Punktmængder i flerdimensionale rum:

Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$
- ▶ z er et *indre* punkt i mængden A hvis $\exists r > 0$ så $K(z, r) \subset A$.
- ▶ A er *åben*, hvis ethvert punkt i A er indre.

Punktmængder i flerdimensionale rum:

Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$
- ▶ z er et *indre* punkt i mængden A hvis $\exists r > 0$ så
 $K(z, r) \subset A.$
- ▶ A er *åben*, hvis ethvert punkt i A er indre.
- ▶ z tilhører *randen* ∂A af A hvis $\forall r > 0$:
 $K(z, r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(z, r) \cap \complement A \neq \emptyset.$

Punktmængder i flerdimensionale rum:

Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$
- ▶ z er et *indre* punkt i mængden A hvis $\exists r > 0$ så
 $K(z, r) \subset A.$
- ▶ A er *åben*, hvis ethvert punkt i A er indre.
- ▶ z tilhører *randen* ∂A af A hvis $\forall r > 0$:
 $K(z, r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(z, r) \cap \complement A \neq \emptyset.$
- ▶ *Afslutningen* af A er $\bar{A} = A \cup \partial A.$

Punktmængder i flerdimensionale rum:

Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$
- ▶ z er et *indre* punkt i mængden A hvis $\exists r > 0$ så
 $K(z, r) \subset A.$
- ▶ A er *åben*, hvis ethvert punkt i A er indre.
- ▶ z tilhører *randen* ∂A af A hvis $\forall r > 0$:
 $K(z, r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(z, r) \cap \complement A \neq \emptyset.$
- ▶ *Afslutningen* af A er $\bar{A} = A \cup \partial A.$
- ▶ A er *lukket* (eller *afsluttet*) hvis $\partial A \subseteq A$, altså hvis
 $\bar{A} = A.$

Punktmængder i flerdimensionale rum:

Definitioner

- ▶ *Åben kugle*, centrum z , radius r :
$$K(z, r) = \{x \mid \|x - z\| < r\}.$$
- ▶ z er et *indre* punkt i mængden A hvis $\exists r > 0$ så $K(z, r) \subset A$.
- ▶ A er *åben*, hvis ethvert punkt i A er indre.
- ▶ z tilhører *randen* ∂A af A hvis $\forall r > 0$:
$$K(z, r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(z, r) \cap \complement A \neq \emptyset.$$
- ▶ *Afslutningen* af A er $\bar{A} = A \cup \partial A$.
- ▶ A er *lukket* (eller *afsluttet*) hvis $\partial A \subseteq A$, altså hvis $\bar{A} = A$.
- ▶ A er *begrænset* hvis $\exists R > 0$ så $A \subset K(0, R)$.

Funktion af flere variable: Definitioner

Funktion af flere
variable

Preben Alsholm

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .

Funktion af flere
variable

Norm og
skalarprodukt i \mathbb{R}^k
Punktmængder i \mathbb{R}^k :
Definitioner

**Funktion af flere
variable: Definitioner**

Grænseværdi,
definition og
Eksempel 1 (p. 28)

Grænseværdi,
Eksempel 4 (p. 29)

Grænseværdi,
Eksempel 2 (p. 28)

Kontinuitet,
Definition

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
I

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
II

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
III

Funktion af flere variable: Definitioner

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .
- ▶ Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.

Funktion af flere variable: Definitioner

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .
- ▶ Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- ▶ *Billedmængden er $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$*

Funktion af flere variable: Definitioner

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .
- ▶ Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- ▶ *Billedmængden* er $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
- ▶ f er *surjektiv* ("på") hvis $f(A) = \mathbb{R}^m$.

Funktion af flere variable: Definitioner

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .
- ▶ Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- ▶ *Billedmængden* er $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
- ▶ f er *surjektiv* ("på") hvis $f(A) = \mathbb{R}^m$.
- ▶ f er *injektiv* (eller *enentydig*, 1-1) hvis $f(x) = f(y) \implies x = y$.

Funktion af flere variable: Definitioner

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .
- ▶ Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- ▶ *Billedmængden* er $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
- ▶ f er *surjektiv* ("på") hvis $f(A) = \mathbb{R}^m$.
- ▶ f er *injektiv* (eller *enentydig*, 1-1) hvis $f(x) = f(y) \implies x = y$.
- ▶ *Grafen for f* er $\{(x, y) \mid x \in A \wedge y = f(x)\}$. Grafen er en delmængde af \mathbb{R}^{k+m} .

Funktion af flere variable: Definitioner

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Notationen $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ betyder, at funktionen f er defineret i A og har værdier i \mathbb{R}^m .
- ▶ Altså hvis $x \in A$ så gælder $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- ▶ *Billedmængden* er $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
- ▶ f er *surjektiv* ("på") hvis $f(A) = \mathbb{R}^m$.
- ▶ f er *injektiv* (eller *enentydig*, 1-1) hvis $f(x) = f(y) \implies x = y$.
- ▶ *Grafen* for f er $\{(x, y) \mid x \in A \wedge y = f(x)\}$. Grafen er en delmængde af \mathbb{R}^{k+m} .
- ▶ Se Maple-worksheet for grafer og niveaukurver for reel funktion af 2 variable.

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .
- ▶ Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow u$, hvis
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - a\| < \varepsilon$$

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .
- ▶ Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow u$, hvis
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - a\| < \varepsilon$$
- ▶ **Anden skrivemåde: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.**

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .
- ▶ Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow u$, hvis
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - a\| < \varepsilon$$
- ▶ Anden skrivemåde: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.
- ▶ **Eksempel 1: Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved**

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .
- ▶ Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow u$, hvis
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - a\| < \varepsilon$$
- ▶ Anden skrivemåde: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.
- ▶ Eksempel 1: Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .
- ▶ Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow u$, hvis
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - a\| < \varepsilon$$
- ▶ Anden skrivemåde: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.
- ▶ Eksempel 1: Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har $f(x, x) = \frac{1}{2}$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$.

Grænseværdi, definition og Eksempel 1 (p. 28)

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punktet $u \in \mathbb{R}^k$ kaldes et *akkumulationspunkt* for A , hvis $K(u, r) \cap (A \setminus \{u\}) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$.
- ▶ Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ og u et akkumulationspunkt for A .
- ▶ Lad $a \in \mathbb{R}^m$. Vi vil sige, at $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow u$, hvis
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - a\| < \varepsilon$$
- ▶ Anden skrivemåde: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.
- ▶ Eksempel 1: Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har $f(x, x) = \frac{1}{2}$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$.
- ▶ **Konklusion:** $f(x, y)$ har ingen grænseværdi for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

- ▶ Det er nærliggende at tro, at $f(x, y)$ har grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Men det er GALT!

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

- ▶ Det er nærliggende at tro, at $f(x, y)$ har grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Men det er GALT!
- ▶ Vi har nemlig for alle $x \neq 0$

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Grænseværdi, Eksempel 4 (p. 29)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- ▶ Vi har $f(x, 0) = 0$ for alle $x \neq 0$. Så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.
- ▶ Vi har for $k \neq 0$ og $x \neq 0$

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0$$

- ▶ Det er nærliggende at tro, at $f(x, y)$ har grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Men det er GALT!
- ▶ Vi har nemlig for alle $x \neq 0$

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

- ▶ Altså har $f(x, y)$ ikke nogen grænseværdi for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- ▶ Vi har

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} |x| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- ▶ Vi har

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} |x| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

- ▶ Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis blot $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ vil også $|x| < \varepsilon$ og dermed $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

Grænseværdi, Eksempel 2 (p. 28)

- ▶ Funktionen f er defineret i alle punkter på nær $(0, 0)$ ved

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

- ▶ Vi vil vise, at $f(x, y) \rightarrow 0$ for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- ▶ Vi har

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} |x| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

- ▶ Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis blot $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ vil også $|x| < \varepsilon$ og dermed $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$.
- ▶ Altså har $f(x, y)$ grænseværdien 0 for $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Kontinuitet, Definition

► Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.
- ▶ f er *kontinuert* i u , hvis $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$.

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.
- ▶ f er *kontinuert* i u , hvis $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$.
- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af A , siges f at være kontinuert i A .

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.
- ▶ f er *kontinuert* i u , hvis $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$.
- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af A , siges f at være kontinuert i A .
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i u , så er $f + g$ og $f - g$ kontinuerte i u .

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.
- ▶ f er *kontinuert* i u , hvis $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$.
- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af A , siges f at være kontinuert i A .
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i u , så er $f + g$ og $f - g$ kontinuerte i u .
- ▶ Hvis $m = 1$ gælder yderligere, at fg og $\frac{f}{g}$ er kontinuert i u (den sidste forudsat $g(u) \neq 0$).

Kontinuitet, Definition

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $u \in A$.
- ▶ f er *kontinuert* i u , hvis $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$.
- ▶ Hvis f er kontinuert i alle punkter af A , siges f at være kontinuert i A .
- ▶ Hvis f og g begge er kontinuerte i u , så er $f + g$ og $f - g$ kontinuerte i u .
- ▶ Hvis $m = 1$ gælder yderligere, at fg og $\frac{f}{g}$ er kontinuert i u (den sidste forudsat $g(u) \neq 0$).
- ▶ Hvis $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $B \supseteq f(A)$ og $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ begge er kontinuerte, så er $g \circ f$ kontinuert.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- ▶ Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ være kontinuert.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- ▶ Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ være kontinuert.
- ▶ Punktmængden $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = r(t), t \in I\}$ er da en *kontinuert kurve* i \mathbb{R}^k .

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- ▶ Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ være kontinuert.
- ▶ Punktmængden $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = r(t), t \in I\}$ er da en *kontinuert kurve* i \mathbb{R}^k .
- ▶ Mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er *sammenhængende*, hvis ethvert par af punkter fra A kan forbindes med en kontinuert kurve, der helt forløber i A .

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- ▶ Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ være kontinuert.
- ▶ Punktmængden $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = r(t), t \in I\}$ er da en *kontinuert kurve* i \mathbb{R}^k .
- ▶ Mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er *sammenhængende*, hvis ethvert par af punkter fra A kan forbindes med en kontinuert kurve, der helt forløber i A .
- ▶ **Hovedsætning 1.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være sammenhængende og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også sammenhængende.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- ▶ Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ være kontinuert.
- ▶ Punktmængden $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = r(t), t \in I\}$ er da en *kontinuert kurve* i \mathbb{R}^k .
- ▶ Mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er *sammenhængende*, hvis ethvert par af punkter fra A kan forbindes med en kontinuert kurve, der helt forløber i A .
- ▶ **Hovedsætning 1.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være sammenhængende og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også sammenhængende.
- ▶ **Bevis:** Lad $u, v \in f(A)$. Der eksisterer $x, y \in A$, så $u = f(x)$ og $v = f(y)$. Men x og y kan forbindes med en kontinuert kurve i A givet ved parameterfremstilling $t \rightarrow r(t), t \in I$.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

- ▶ Lad $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ være kontinuert.
- ▶ Punktmængden $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = r(t), t \in I\}$ er da en *kontinuert kurve* i \mathbb{R}^k .
- ▶ Mængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er *sammenhængende*, hvis ethvert par af punkter fra A kan forbindes med en kontinuert kurve, der helt forløber i A .
- ▶ **Hovedsætning 1.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være sammenhængende og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også sammenhængende.
- ▶ **Bevis:** Lad $u, v \in f(A)$. Der eksisterer $x, y \in A$, så $u = f(x)$ og $v = f(y)$. Men x og y kan forbindes med en kontinuert kurve i A givet ved parameterfremstilling $t \rightarrow r(t), t \in I$.
- ▶ Men så vil $t \rightarrow f(r(t))$ være en kontinuert kurve i $f(A)$, der forbinder u med v .

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner II

Funktion af flere
variable

Preben Alsholm

Funktion af flere
variable

Norm og

skalarprodukt i \mathbb{R}^k

Punktmængder i \mathbb{R}^k :

Definitioner

Funktion af flere
variable: Definitioner

Grænseværdi,

definition og

Eksempel 1 (p. 28)

Grænseværdi,

Eksempel 4 (p. 29)

Grænseværdi,

Eksempel 2 (p. 28)

Kontinuitet,

Definition

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
I

**Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
II**

Hovedsætninger om
kontinuerte funktioner
III

- ▶ **Hovedsætning 2.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket (= afsluttet) og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også lukket og begrænset.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner II

- ▶ **Hovedsætning 2.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket (= afsluttet) og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også lukket og begrænset.
- ▶ **Beviset er ikke helt simpelt, så vi udelader det.**

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner II

- ▶ **Hovedsætning 2.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket (= afsluttet) og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er $f(A)$ også lukket og begrænset.
- ▶ Beviset er ikke helt simpelt, så vi udelader det.
- ▶ **Sætningen anvendt på specialtilfældet $m = 1$ viser, at en kontinuert funktion af en eller flere variable antager en største- og en mindsteværdi på en lukket og begrænset mængde.**

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:

Funktion af flere variable

Preben Alsholm

Funktion af flere variable

Norm og

skalarprodukt i \mathbb{R}^k

Punktmængder i \mathbb{R}^k :

Definitioner

Funktion af flere variable: Definitioner

Grænseværdi,

definition og

Eksempel 1 (p. 28)

Grænseværdi,

Eksempel 4 (p. 29)

Grænseværdi,

Eksempel 2 (p. 28)

Kontinuitet,

Definition

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner I

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner II

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- ▶ δ vil normalt afhænge af x (og af ε).

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- ▶ δ vil normalt afhænge af x (og af ε).
- ▶ f er *uniformt kontinuert* i A hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

hvor der til $\varepsilon > 0$ kan vælges et δ fælles for alle $x \in A$.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- ▶ δ vil normalt afhænge af x (og af ε).
- ▶ f er *uniformt kontinuert* i A hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

hvor der til $\varepsilon > 0$ kan vælges et δ fælles for alle $x \in A$.

- ▶ **Hovedsætning 3.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er f uniformt kontinuert.

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- ▶ δ vil normalt afhænge af x (og af ε).
- ▶ f er *uniformt kontinuert* i A hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

hvor der til $\varepsilon > 0$ kan vælges et δ fælles for alle $x \in A$.

- ▶ **Hovedsætning 3.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er f uniformt kontinuert.
- ▶ **Beviset er ikke simpelt, så vi udelader det.**

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- ▶ δ vil normalt afhænge af x (og af ε).
- ▶ f er *uniformt kontinuert* i A hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

hvor der til $\varepsilon > 0$ kan vælges et δ fælles for alle $x \in A$.

- ▶ **Hovedsætning 3.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er f uniformt kontinuert.
- ▶ Beviset er ikke simpelt, så vi udelader det.
- ▶ Hvis A er begrænset, men ikke lukket, og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan udvides til en kontinuert funktion på afslutningen \bar{A} . Så er f uniformt kontinuert på A .

Hovedsætninger om kontinuerte funktioner III

- ▶ Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi sammenskriver definitionen af kontinuitet og grænseværdi:
- ▶ f er kontinuert i $x \in A$, hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

- ▶ δ vil normalt afhænge af x (og af ε).
- ▶ f er *uniformt kontinuert* i A hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \wedge x + h \in A \implies \|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon$$

hvor der til $\varepsilon > 0$ kan vælges et δ fælles for alle $x \in A$.

- ▶ **Hovedsætning 3.** Lad $A \subseteq \mathbb{R}^k$ være lukket og begrænset og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuert. Så er f uniformt kontinuert.
- ▶ Beviset er ikke simpelt, så vi udelader det.
- ▶ Hvis A er begrænset, men ikke lukket, og $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan udvides til en kontinuert funktion på afslutningen \bar{A} . Så er f uniformt kontinuert på A .
- ▶ **Illustreret for $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i [Maple worksheet](#).**