MAT 91117 Opgave E6

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er givet matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Vi skal bestemme determinanten $\det(A)$. Vi finder ved operationerne $R_2 := R_2 - 2R_1, R_3 := R_3 - R_1$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

   Ved udvikling langs første søjle fås herefter

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

2. Vi skal bestemme den inverse matrix A^{-1}, som jo åbenbart eksisterer, da $\det(A) \neq 0$. Vi opskriver matricen $[A\,|E\,]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   der ved operationerne $R_2 := R_2 - 2R_1, R_3 := R_3 - R_1$giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Operationen $R_3 := R_3 - \frac{1}{2}R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Herefter bruger vi operationerne $R_2 := R_2 + 2R_1, R_1 := R_1 - R_3$, der giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Operationen $R_2 := \frac{1}{2}R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Hermed har vi altså fundet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Vi skal også angive værdien af $\det\left(A^{-1}\right)$. Vi har

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}$$

3. Vi skal nu løse matrixligningen $AX = B$. Da A^{-1} lige er blevet bestemt, sker dette lettest ved brug af formlen $X = A^{-1}B$. Dvs.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$