MAT 01901 Opgave E18

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Vi skal løse differentialligningen

$$y' + 2\frac{\cos t}{\sin t}y = 3\cos t, \qquad t \in]0, \pi[$$

med begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

Ligningen er lineær. Vi benytter panserformlen

$$y(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\, dt + Ce^{-P(t)}$$

Vi finder ved brug af substitutionen $u = \sin t$, at $du = \cos t\; dt$, så

$$P(t) = \int 2\frac{\cos t}{\sin t} dt = \int 2\frac{du}{u} = 2\ln|u| = \ln\left(u^2\right) = \ln\left(\sin^2 t\right)$$

Altså fås

$$\begin{aligned} e^{P(t)} &= e^{\ln\left(\sin^2 t\right)} = \sin^2 t \\ e^{-P(t)} &= \frac{1}{\sin^2 t} \end{aligned}$$

hvormed

$$y(t) = \frac{1}{\sin^2 t} \int \sin^2 t \cdot 3\cos t\; dt + \frac{C}{\sin^2 t}$$

Vi bruger nu samme substitution som før og finder

$$\int \sin^2 t \cdot 3\cos t\; dt = \int 3u^2\; du = u^3 = \sin^3 t$$

så den fuldstændige løsning er givet ved

$$y(t) = \sin t + \frac{C}{\sin^2 t}, \qquad C \in R$$

Da begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ skal opfyldes, indsættes $t = \frac{\pi}{2}$ og $y = 5$ i formlen for den fuldstændige løsning:

$$5 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{C}{\sin^2 \frac{\pi}{2}}$$

Heraf fås $5 = 1 + C$, altså $C = 4$. Den søgte løsning er

$$y(t) = \sin t + \frac{4}{\sin^2 t}$$

med definitionsinterval $]0, \pi[$.