

MAT 01901 Opgave E19

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Indenfor de komplekse tal er der givet ligningen

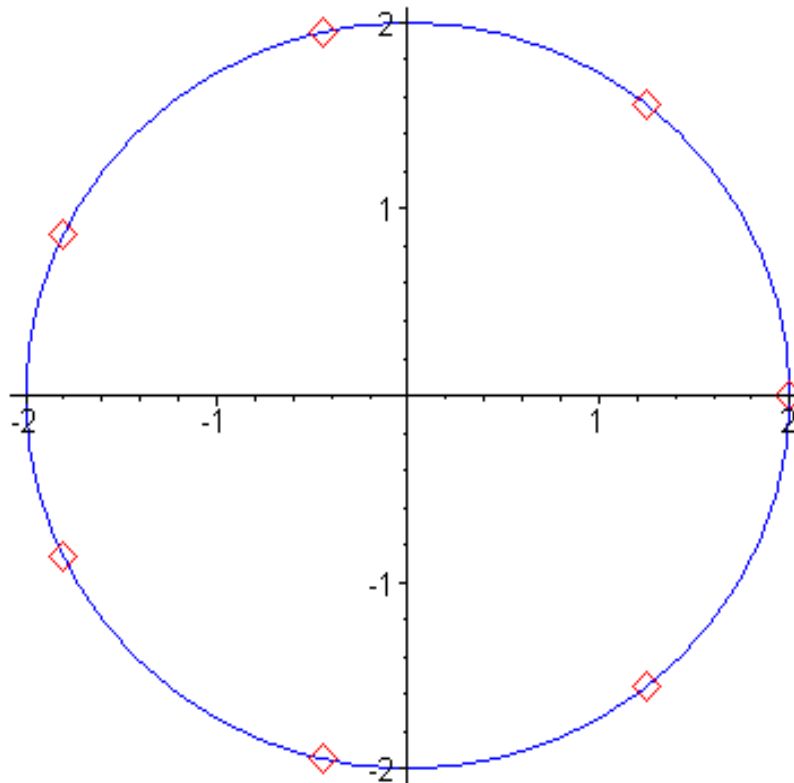
$$z^7 = 128$$

1. Vi skal først løse ligningen. Rødderne skal blot angives på polær form. Vi finder, da $2^7 = 128$, at

$$z = z_p = 2 \exp\left(ip \frac{2\pi}{7}\right)$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2. Rødderne ligger jævnt fordelt på cirklen med centrum i 0 og radius 2 således



3. Produktet af rødderne kan findes ved at opløse polynomiet $z^7 - 128$ i

førstegradsfaktorer, der derefter ganges ud igen:

$$\begin{aligned} z^7 - 128 &= (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_6) \\ &= z^7 + (\dots)z^6 + \dots + (\dots)z - z_0z_1z_2z_3z_4z_5z_6 \end{aligned}$$

hvoraf ses, at produktet er 128.

Produktet kan også udregnes konkret således:

$$\begin{aligned} & z_0z_1z_2z_3z_4z_5z_6 \\ &= 2^7 \exp(0) \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right) \exp\left(i2\frac{2\pi}{7}\right) \exp\left(i3\frac{2\pi}{7}\right) \exp\left(i4\frac{2\pi}{7}\right) \exp\left(i5\frac{2\pi}{7}\right) \exp\left(i6\frac{2\pi}{7}\right) \\ &= 128 \exp\left(i\frac{2\pi}{7}(1+2+3+4+5+6)\right) = 128 \exp(i6\pi) = 128 \end{aligned}$$