MAT 01901 Opgave E20

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er givet følgende tabel over sammenhørende værdier af de to fysiske størrelser x og y:

x	0	1	2	3	4
y	-2.6	4.5	5.4	1.5	3.5

Modellen for sammenhængen mellem x og y er givet ved ligningen

$$y = u \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + v \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + wx$$

hvor u, v og w er konstanter.

1. Vi opskriver det ligningssystem af 5 ligninger, som de ubekendte u, v og w skal opfylde. Vi finder

$$\begin{aligned} v &= -2.6 \\ u + w &= 4.5 \\ -v + 2w &= 5.4 \\ -u + 3w &= 1.5 \\ v + 4w &= 3.5 \end{aligned}$$

   På matrixform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ 4.5 \\ 5.4 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

2. Med A og b som henholdsvis koefficientmatrix og højreside er det tilsvarende normalligningssystem

$$A^t A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A^t b$$

Vi finder

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 30 \end{pmatrix}, \qquad A^tb = \begin{pmatrix} 3 \\ -4.5 \\ 33.8 \end{pmatrix}$$

Dette system skal ikke løses, men determinanten eller rangen af A^tA kan findes, hvorved kan afgøres, om systemet har mere end én løsning. Ved Gauss-elimination fås ved operationen $R_3 := R_3 + R_1$ matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

Ved operationen $R_3 := R_3 - \frac{2}{3}R_2$ fås

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} \end{pmatrix}$$

Altså har matricen A^tA fuld rang (nemlig 3). Normalligningssystemet har derfor netop én løsning. Determinanten er $2 \cdot 3 \cdot \frac{80}{3} = 160 \neq 0$, så heraf kan samme konklusion drages.

Til orientering angives her løsningen til normalligningssystemet: $u = 2.9925, v = -2.495, w = 1.4925$.