MAT 01901 Opgave E21

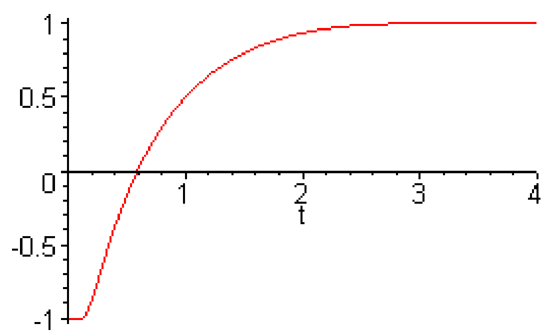
Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er for $t > 0$ givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{t}$$

med begyndelsesbetingelsen $y(1) = \frac{1}{2}$. Grafen for løsningen er vist på figuren.



Løsningen er konstant lig med 1 på et interval $[b, \infty[$ og konstant lig med -1 på et lille interval $]0, a]$, hvor $0 < a < 1 < b$.

1. Da $\frac{\sqrt{1-y^2}}{t} \geq 0$ for $t > 0$, må enhver løsning opfylde $y'(t) \geq 0$ for alle $t > 0$. Derfor kan løsningen ikke aftage på noget delinterval af $]0, \infty[$.

2. Så længe $|y| < 1$ kan løsningen findes ved separation:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dt}{t} + C$$

dvs.

$$\arcsin y = \ln t + C$$

hvor vi nu med det samme bestemmer konstanten ud fra $y(1) = \frac{1}{2}$. Indsættelse giver $\arcsin \frac{1}{2} = C$, altså $C = \frac{\pi}{6}$. Hermed er løsningen givet ved

$$y(t) = \sin\left(\ln t + \frac{\pi}{6}\right)$$

3. Det fundne udtryk $y(t) = \sin\left(\ln t + \frac{\pi}{6}\right)$ er løsning kun på intervallet $]a, b[$. Tallene a og b er bestemt ved at $y(a) = -1$ og $y(b) = 1$ og ved at a og b ligger tættest mulig på 1. Dvs. vi finder

$$\begin{aligned} \ln a + \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{2} \\ \ln b + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

hvor af fås

$$\begin{aligned} a &= \exp\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ b &= \exp\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$