MAT 01901 Opgave E27

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Der er for $x > 0$ givet differentialligningen

$$xy' + y = \sin(\pi x)$$

med begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

1. Differentialligningen er lineær. Vi kan bruge Panserformlen, men først skal ligningen normeres:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

Vi finder $P(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$, så

$$\begin{aligned} e^{P(x)} &= e^{\ln x} = x \\ e^{-P(x)} &= \frac{1}{e^{P(x)}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}\int x \cdot \frac{\sin(\pi x)}{x} dx + \frac{C}{x} \\ &= \frac{1}{x}\int \sin(\pi x)\, dx + \frac{C}{x} = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right) + \frac{C}{x} \\ &= \frac{-\cos \pi x + C\pi}{\pi x} \end{aligned}$$

Indsættelse af $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ giver

$$1 = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C\pi}{\frac{\pi}{2}}$$

Heraf fås, at $C = \frac{1}{2}$. Løsningen er dermed

$$y(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \cos \pi x}{\pi x}$$

2. Bestemmelsen af $y'\left(\frac{1}{2}\right)$ sker allerlettest ved indsættelse af $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ i den oprindelige ligning

$$xy' + y = \sin(\pi x)$$

Herved fås

$$\frac{1}{2} y'\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Altså fås

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Resultatet kan selvfølgelig også findes ved differentiation af den eksplicitte løsning.