MAT 01901 Opgave E28

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Om en 3×3-matrix A er givet, at

$$\begin{aligned} Av_1 &= -2v_1 \\ Av_2 &= v_2 \\ Av_3 &= 2v_3 \end{aligned}$$

hvor vektorerne v_1, v_2 og v_3 er givet ved

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Vi skal finde matricen A.

Matricens egenværdier er åbenbart $-2, 1$ og 2, og de tilhørende egenvektorer er v_1, v_2 og v_3. Da egenværdierne er forskellige, kan vi umiddelbart slutte, at A er diagonaliserbar. Vi har så, at

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

når

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ S &= [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi finder S^{-1} på sædvanlig måde. Udgangspunktet er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 2R_1,\ R_3 := R_3 - 2R_1$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ved rækkeoperationen $R_3 := R_3 - 2R_2$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + 3R_3,\ R_1 := R_1 + R_3$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Heraf konkluderer vi, at

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A kan nu udregnes

$$A = S\Lambda S^{-1} = S\left(\Lambda S^{-1}\right) = S\begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -28 & 23 & -11 \\ -32 & 26 & -12 \end{pmatrix}$$