MAT 01901 Opgave E32

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Vi skal for $t > 0$ finde den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - t \sin t \cdot e^{-\frac{y}{t}}$$

der opfylder $y(\pi) = 0$. Vi indfører en ny ubekendt funktion v ved $v(t) = \frac{y(t)}{t}$, hvorved altså $y(t) = tv(t)$. Herved fås

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = v(t) + tv'(t)$$

Dette indsættes i differentialligningen, hvorved vi får

$$v(t) + tv'(t) = v(t) - t \sin t \cdot e^{-v(t)}$$

Efter reduktion kan denne differentialligning i v også skrives på formen

$$\frac{dv}{dt} = -\sin t \cdot e^{-v}$$

Vi ser, at v opfylder en separabel differentialligning. Der er ingen konstante løsninger. Alle løsninger kan derfor findes ved separation:

$$\int e^{v} dv = \int -\sin t dt$$

Heraf fås

$$e^{v} = \cos t + C$$

og dermed

$$v = \ln(\cos t + C)$$

Altså er den fuldstændige løsning til den oprindelige ligning givet ved

$$y(t) = t \ln(\cos t + C)$$

hvor $C \in R$. Der er opgivet, at $y(\pi) = 0$. ved indsættelse heraf fås

$$0 = y(\pi) = \pi \ln(\cos \pi + C)$$

altså $\ln(-1 + C) = 0$. Heraf følger, at $C = 2$. Løsningen er derfor

$$y(t) = t \ln(2 + \cos t)$$

for $t > 0$.