MAT 01901 Opgave E35

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

for alle $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Differentialkvotienten $f'(x)$ er givet ved

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\cos x\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

2. f er en voksende funktion, da dens afledede er positiv på intervallet$\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Da f er voksende er værdimængden intervallet mellem $\lim_{x \to 0_+} f(x)$ og $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Hermed er værdimængden $]-\infty, 0]$.

4. En forskrift for f^{-1} findes således:

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} \\ &\Longleftrightarrow \sin^2 x - 2y\sin x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \sin x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \sin x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Kun det positive fortegn kan dog bruges, da $y \leq 0$ og $\sin x > 0$ på $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Derfor fås

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) \Longleftrightarrow \sin x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\Longleftrightarrow x = \arcsin\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

Altså har vi, at

$$f^{-1}(y) = \arcsin\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

eller, hvis man foretrækker at kalde variablen x:

$$f^{-1}(x) = \arcsin\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Definitionsområdet for f^{-1} er jo værdimængden for f, altså $]-\infty, 0]$.