MAT 01911 Opgave E32

Preben Alsholm
Diplom Kemi, DTU

18. november 2003

Vi skal for $t > 0$ finde den løsning til differentialligningen

$$t\frac{dy}{dt} = y + t\cos^2\left(\frac{y}{t}\right)$$

der opfylder $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Løsningen findes af Maple til

$$y(t) = t \arctan(1 + \ln t)$$

Løsningen kan også findes ved håndkraft ved at indføre en ny ubekendt funktion v ved $v(t) = \frac{y(t)}{t}$, hvorved altså $y(t) = tv(t)$. Herved fås

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = v(t) + tv'(t)$$

Dette indsættes i differentialligningen, hvorved vi får

$$v(t) + tv'(t) = v(t) + \cos^2(v(t))$$

Efter reduktion kan denne differentialligning i v også skrives på formen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\cos^2 v}{t}$$

Vi ser, at v opfylder en separabel differentialligning. Konstante løsninger er $v = \frac{\pi}{2} + p\pi, p \in Z$. Alle andre løsninger kan derfor findes ved separation:

$$\int \frac{dv}{\cos^2 v} = \int \frac{1}{t}dt$$

Heraf fås

$$\tan v = \ln t + C$$

og dermed

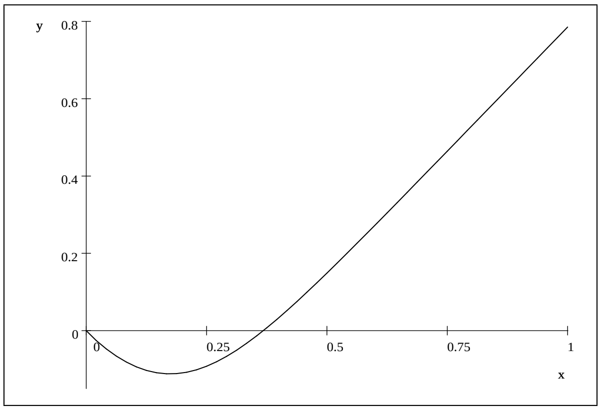
$$v = \arctan(\ln t + C) + q\pi$$

hvor $q \in Z$. Altså er den fuldstændige løsning til den oprindelige ligning givet ved

$$y(t) = t \cdot (\arctan(\ln t + C) + q\pi)$$

hvor $C \in R$. Desuden er der også løsningerne $y(t) = t \cdot \left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)$, hvor $p \in Z$. Hvis begyndelsesbetingelsen $y(1) = \frac{\pi}{4}$ skal opfyldes, må vi søge blandt $y(t) = t \cdot (\arctan(\ln t + C) + q\pi)$. Vi ser med det samme, at $q = 0$ er eneste mulighed. Derefter følger, at $\frac{\pi}{4} = y(1) = \arctan(C)$, så $C = 1$. Hermed har vi den af Maple fundne løsning.

$t \arctan(1 + \ln t)$



Grænseværdien $\lim_{t \to 0_+} y(t)$ er

$$\lim_{t \to 0_+} t \arctan(1 + \ln t) = 0$$

da $\arctan(1 + \ln t) \to -\frac{\pi}{2}$ for $t \to 0_+$. Løsningen er nul, hvis og kun hvis

$$\arctan(1 + \ln t) = 0 \iff 1 + \ln t = 0 \iff t = e^{-1}$$

Arealet af området i fjerde kvadrant mellem grafen og t-aksen er givet ved

$$-\int_0^{e^{-1}} t \arctan(1 + \ln t)\, dt$$

Dette integral er tilnærmelsesvist lig med 0.02700080925.