MAT 91128 Opgave E04

Preben Alsholm

Maj 2001

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = xye^y \ln x$$

for alle $(x,y) \in R_+ \times R$. Vi skal finde de stationære punkter for f og for hvert af disse afgøre dets type.

Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^y(1+\ln x) \\ f_y(x,y) &= (1+y)e^y x \ln x \end{aligned}$$

Altså fås

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \iff \left(y=0 \vee x=e^{-1}\right) \wedge (y=-1 \vee x=1) \\ &\iff (x,y)=(1,0) \vee (x,y)=\left(e^{-1},-1\right) \end{aligned}$$

Vi har altså to stationære punkter, nemlig $(1,0)$ og $\left(e^{-1},-1\right)$.

Den hessiske matrix for f er givet ved

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{y}{x}e^y & (1+y)e^y(1+\ln x) \\ (1+y)e^y(1+\ln x) & (2+y)e^y x \ln x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hermed finder vi

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

der har karakterligningen $\lambda^2 - 1 = 0$. Egenværdierne er ± 1 og har dermed forskellige fortegn. Punktet $(1,0)$ er altså et egentligt saddelpunkt.

Tilsvarende findes

$$H\left(e^{-1},-1\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix}$$

Denne diagonalmatrix har egenværdierne -1 og $-e^{-2}$. Begge er negative, altså er punktet $\left(e^{-1},-1\right)$ et egentligt lokalt maksimumspunkt.