MAT 01902 Opgave E33

Preben Alsholm

Juni 2003

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y,z) = \left(x^2 - 10x + 25\right) e^{-x} + 4y^2 + 2yz + z^2 + 18y + 27$$

for alle $(x,y,z) \in R^3$. Vi skal bestemme de stationære punkter for f og for hvert af disse afgøre dets type.

De stationære punkter opfylder $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= (2x-10)e^{-x} - \left(x^2 - 10x + 25\right)e^{-x} = e^{-x}(5-x)(x-7) \\ f_y(x,y,z) &= 8y + 2z + 18 \\ f_z(x,y,z) &= 2y + 2z \end{aligned}$$

Hermed finder vi, at

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y,z) = (5,-3,3) \vee (x,y,z) = (7,-3,3)$$

Hessematricen for f er givet ved

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-x}\left(x^2 - 14x + 47\right) & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Altså har vi

$$H(5,-3,3) = \begin{pmatrix} 2e^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$H(7,-3,3) = \begin{pmatrix} -2e^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenværdierne for den første er $2e^{-5}, 5 \pm \sqrt{13}$. Alle tre er positive: Punktet $(5,-3,3)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt. Egenværdierne for den anden er $-2e^{-7}, 5 \pm \sqrt{13}$. To er positive og en er negativ. Punktet $(7,-3,3)$ er et saddelpunkt.