MAT 91112 Opgave E33

Preben Alsholm

4/12 1998

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = \ln x \sin(\pi x)$$

for alle $x > 0$.

Vi skal finde $\lim_{x \to 0+} f(x)$. Vi finder

$$\ln x \sin(\pi x) = \pi x \ln x \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \to 0 \cdot 1 = 0$$

for $x \to 0_+$, hvor vi har brugt de kendte resultater: $x \ln x \to 0$ for $x \to 0_+$ og $\frac{\sin t}{t} \to 1$ for $t \to 0$. Alternativt kan man bruge l'Hospitals regel efter omskrivning til brøk:

$$\ln x \sin(\pi x) = \frac{\ln x}{1/\sin(\pi x)} \to \text{"}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}$$

for $x \to 0_+$. L'Hospitals regel:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2(\pi x)}\cos(\pi x)\pi} = \frac{-\sin^2(\pi x)}{x\cos(\pi x)\pi} = \frac{-\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} \to 0$$

for $x \to 0_+$, idet vi igen udnytter, at $\frac{\sin t}{t} \to 1$ for $t \to 0$. (Alternativet er endnu en anvendelse af l'Hospitals regel).

Vi skal nu bruge Simpsons formel på integralet $\int_0^2 f(x)\,dx$. Med $n = 4$ fås $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$, så

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 0 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 0\right) \\ &= \frac{1}{6}(-4\ln 2 - 4\ln 3 + 4\ln 2) = -\frac{2}{3}\ln 3 \\ &\cong -\frac{2}{3}1.1 = -\frac{2.2}{3} \cong -0.73 \end{aligned}$$

Maple udregner den eksakte værdi til

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{-\ln 2 + \mathrm{Ci}(2\pi) - \ln \pi - \gamma}{\pi}$$

Med 10 betydende cifre er dette -0.7759291740.