MAT 91112 Opgave E25

Preben Alsholm

14/5 1998

Vi skal først bruge Eulers formler til at vise, at

$$\cos 3t \cdot \sin 2t = \frac{1}{2}\sin 5t - \frac{1}{2}\sin t$$

Vi finder

$$\begin{aligned}
\cos 3t \cdot \sin 2t &= \frac{1}{2}\left(e^{3it} + e^{-3it}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{5it} - e^{it} + e^{-it} - e^{-5it}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{5it} - e^{-5it}\right) - \frac{1}{4i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin 5t - \frac{1}{2}\sin t
\end{aligned}$$

Vi skal dernæst kontrollere, at $y(t) = \frac{1}{4}t\cos t$ er en partikulær løsning til differentialligningen

$$y'' + y = -\frac{1}{2}\sin t$$

Ved differentiation fås $y'(t) = \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}t\sin t$ og $y''(t) = -\frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}t\cos t = -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}t\cos t$. Ved indsættelse af disse udtryk på venstre side af differentialligningen fås

$$-\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t\cos t = -\frac{1}{2}\sin t$$

hvilket er det, som vi gerne skulle få.

Vi skal nu finde den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + y = \cos 3t \cdot \sin 2t \tag{1}$$

Vi skriver ligningen på formen

$$y'' + y = \frac{1}{2}\sin 5t - \frac{1}{2}\sin t$$

Vi løser først den homogene ligning. Karakterligningen er $\lambda^2 + 1 = 0$. Rødderne er $\pm i$. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t, \quad c_1, c_2 \in R.$$

Vi finder nu en partikulær løsning til differentialligningen

$$y'' + y = \frac{1}{2}\sin 5t$$

Ansats: $y_p(t) = A\cos 5t + B\sin 5t$. Ved differentiation fås $y_p'(t) = -5A\sin 5t + 5B\cos 5t$ og $y_p''(t) = -25A\cos 5t - 25B\sin 5t$. Ved indsættelse fås

$$-25A\cos 5t - 25B\sin 5t + A\cos 5t + B\sin 5t = \frac{1}{2}\sin 5t$$

Altså

$$\cos 5t \cdot (-25A + A) + \sin 5t \cdot (-25B + B) = \frac{1}{2}\sin 5t$$

Heraf ses, at $-24A = 0$ og $-24B = \frac{1}{2}$, altså $A = 0$ og $B = -\frac{1}{48}$. Den fuldstændige løsning til differentialligningen (1) er derfor

$$y(t) = \frac{1}{4}t\cos t - \frac{1}{48}\sin 5t + c_1\cos t + c_2\sin t, \quad c_1, c_2 \in R.$$