MAT 91112 Opgave E21

Preben Alsholm

6/12 1997

Der er givet polynomiet

$$p(z) = \left(z^3 - 8z^2 + 22z - 20\right)\left(z^3 + i\right)$$

Vi skal finde samtlige rødder. Vi har åbenbart

$$p(z) = 0 \Longleftrightarrow z^3 - 8z^2 + 22z - 20 = 0 \vee z^3 + i = 0$$

1. $z^3 - 8z^2 + 22z - 20 = 0$. Polynomiet har hele koefficienter. De mulige rationale rødder er derfor

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$$

Men p kan ikke have negative rødder! Derfor indskrænkes de mulige rationale rødder til $1, 2, 4, 5, 10, 20$. Vi finder ved indsættelse, at 2 er rod. Polynomiers division giver

$$z^3 - 8z^2 + 22z - 20 = (z-2)\left(z^2 - 6z + 10\right)$$

Rødderne i $z^2 - 6z + 10$ er

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i$$

2. $z^3 + i = 0$, d.v.s. $z^3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Vi har her en binom ligning. Løsningerne er givet ved

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + p\frac{2\pi}{3}\right)}, \text{ med } p = 0, 1, 2$$

Vi finder følgende tre rødder

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
z_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \\
z_2 &= e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{11}{6}\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Samtlige 6 rødder i polynomiet p er altså

$$2, 3 \pm i, i, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$