MAT 91112 Opgave E31

Preben Alsholm

3/12 1998

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{for} \quad x \leq 1 \\ a \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + b & \text{for} \quad x > 1 \end{cases}$$

hvor a og b er konstanter. Funktionen er kontinuert i 1, hvis og kun hvis

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$$

Heraf fås ligningen

$$a \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + b = \arctan 1$$

altså

$$\frac{1}{2}a + b = \frac{\pi}{4}$$

Grænseværdien $\lim_{x \to 1} f'(x)$ eksisterer, hvis og kun hvis

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{x \to 1+} f'(x)$$

Da vi finder

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{for} \quad x < 1 \\ a\frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) & \text{for} \quad x > 1 \end{cases}$$

giver dette forlangende ligningen

$$\frac{1}{2} = a\frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Altså

$$\frac{1}{2} = a\frac{\pi}{12}\sqrt{3}$$

Heraf findes

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

Indsættes dette i den først fundne ligning, fås

$$b = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$