MAT 91112 Opgave E17

Preben Alsholm

5/12 1997

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{e^x - 1 - x} & \text{for} \quad x < 0 \\ \frac{4\cos x}{e^x + 1} & \text{for} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Vi skal vise, at f er kontinuert i 0. Vi skal altså vise, at $\lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer og er lig med $f(0)$. Vi har umiddelbart, at $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 2$. Vi skal nu undersøge $f(x)$ for $x \to 0_-$. Vi finder "$\frac{0}{0}$" for $x \to 0_-$. Vi bruger l'Hospitals regel

$$\frac{2x\cos(x^2)}{e^x - 1} \to \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \text{ for } x \to 0_-$$

Vi bruger l'Hospitals regel endnu engang

$$\frac{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)}{e^x} \to 2 \text{ for } x \to 0_-$$

Vi konkluderer, at $\lim_{x\to 0-} f(x) = 2 = f(0)$. Da også $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0)$ er hermed vist, at f er kontinuert i 0.