MAT 91112 Opgave E 298

Preben Alsholm

5/12 1996

Vi skal bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + 2y = 2t.$$

Differentialligningen er lineær. Vi kan enten bruge Panserformlen eller udnytte, at ligningen også har konstante koefficienter. Vi viser begge metoder.

1. Panserformlen. Formlen lyder

$$y(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)}.$$

Vi finder $P(t) = \int 2dt = 2t$. Vi har derfor

$$y(t) = e^{-2t} \int e^{2t} 2t dt + Ce^{-2t}.$$

Ved delvis integration findes

$$\int e^{2t} 2t dt = e^{2t} t - \int e^{2t} dt = e^{2t} t - \frac{1}{2} e^{2t} = e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right).$$

Derfor fås

$$y(t) = e^{-2t} e^{2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) + Ce^{-2t} = t - \frac{1}{2} + Ce^{-2t}$$

hvor C er en arbitrær konstant.

2. Konstante koefficienter. Den homogene ligning har karakterligningen $\lambda + 2 = 0$. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor $y(t) = Ce^{-2t}$, hvor C er en arbitrær konstant. En partikulær løsning til den inhomogene ligning har formen $y_p(t) = at + b$. Ved indsættelse i differentialligningen fås:

$$a + 2(at + b) = 2t$$

hvoraf følger, at $a = 1$ og $a + 2b = 0$, d.v.s. at $b = -\frac{1}{2}$. Den fuldstændige løsning er derfor $y(t) = t - \frac{1}{2} + Ce^{-2t}$, hvor C er en arbitrær konstant.