MAT 91112 Opgave E19

Preben Alsholm

6/12 1997

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) = -x(t) + 2x(t)^2 e^{-t} \tag{1}$$

Vi skal finde den fuldstændige løsning til (1). Vi observerer, at funktionen givet ved $x(t) = 0$ for alle $t \in R$, åbenbart er løsning til (1). En løsning, der ikke er identisk nul, kan i ethvert interval, i hvilket den ikke bliver nul, skrives på formen

$$x(t) = \frac{1}{v(t)}$$

Så finder vi

$$x'(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)^2}$$

der indsættes i (1):

$$-\frac{v'(t)}{v(t)^2} = x'(t) = -x(t) + 2x(t)^2 e^{-t} = -\frac{1}{v(t)} + \frac{2e^{-t}}{v(t)^2}$$

Heraf fås

$$v'(t) - v(t) = -2e^{-t} \tag{2}$$

Denne differentialligning er lineær. Vi benytter Panserformlen:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + Ce^{-P(t)} \\ &= e^t \int e^{-t} \left(-2e^{-t}\right) dt + Ce^t = -2e^t \int e^{-2t} dt + Ce^t \\ &= e^{-t} + Ce^t \end{aligned}$$

hvor C er en arbitrær konstant. Hermed er de tilsvarende løsninger til (1) givet ved

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} + Ce^t}$$

hvor C er en arbitrær konstant. Dertil kommer nulløsningen, som vi fandt i begyndelsen. For differentialligningen (1) gælder eksistens- og entydighedssætningen, således at ingen anden løsning end nulløsningen nogensinde kan antage værdien nul.

Hvis løsningen x skal være lige, d.v.s $x(-t) = x(t)$ for alle $t \in R$, får vi forlangendet

$$\frac{1}{e^t + Ce^{-t}} = \frac{1}{e^{-t} + Ce^t}$$

altså

$$e^t + Ce^{-t} = e^{-t} + Ce^t$$

hvoraf

$$e^t - e^{-t} = C\left(e^t - e^{-t}\right)$$

der skal være opfyldt for alle $t \in R$. Vi ser, at $C = 1$. Den søgte løsning er derfor

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} + e^t} = \frac{1}{2\cosh t}$$