MAT 91112 Opgave E 302

Preben Alsholm

5/12 1996

Der er givet differentialligningen

$$y' = \frac{1}{t} y \ln y - \frac{t}{1+t^2} y$$

hvor $t > 0$ og $y > 0$.

Vi indfører en ny ubekendt funktion v ved $y(t) = e^{v(t)}$. Så finder vi

$$y' = v' e^v = \frac{1}{t} e^v v - \frac{t}{(1+t^2)} e^v$$

hvoraf fås

$$v' = \frac{1}{t} v - \frac{t}{1+t^2}$$

eller anderledes skrevet

$$v' - \frac{1}{t} v = -\frac{t}{1+t^2}.$$

Denne differentialligning er lineær. Panserformlen benyttes:

$$v(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt + C e^{-P(t)}.$$

Vi finder $P(t) = \int -\frac{1}{t} dt = -\ln t$, så $e^{P(t)} = \frac{1}{t}$ og $e^{-P(t)} = t$. Derfor fås

$$v(t) = t \int \frac{1}{t} \left(-\frac{t}{1+t^2} \right) dt + Ct = -t \int \frac{1}{1+t^2} dt + Ct = -t \arctan t + Ct$$

hvor C er en arbitrær konstant. Derfor fås

$$y(t) = e^{v(t)} = e^{-t \arctan t + Ct}.$$

Da $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$ for $t \to \infty$, ses det at løsningens opførsel for $t \to \infty$ afhænger af om $C < \frac{\pi}{2}, C > \frac{\pi}{2}$ eller $C = \frac{\pi}{2}$. For $C < \frac{\pi}{2}$ fås $Ct - t\arctan t \to -\infty$ for $t \to \infty$ og derfor, at $y(t) \to 0$ for $t \to \infty$. For $C > \frac{\pi}{2}$ fås $Ct - t\arctan t \to +\infty$ for $t \to \infty$ og derfor, at $y(t) \to \infty$ for $t \to \infty$. Tilfældet $C = \frac{\pi}{2}$ må undersøges nærmere. Vi finder

$$-t\arctan t + \frac{\pi}{2}t = \frac{-\arctan t + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{t}} \to \text{,,}\frac{0}{0}\text{''} \text{ for } t \to \infty.$$

l'Hospital's regel giver

$$\frac{-\frac{1}{1+t^2}}{-\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2}{1+t^2} \to 1 \text{ for } t \to \infty.$$

Altså har vi også, at $-t\arctan t + \frac{\pi}{2}t \to 1$ for $t \to \infty$ og dermed, at $\lim_{t\to\infty} \exp\left(-t\arctan t + \frac{\pi}{2}t\right) = e$.