MAT 91112 Opgave E13

Preben Alsholm

3/6 1997

Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin t}{\cos y}$$

Den skal betragtes i området givet ved $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, t \in R$.

Ligningen kan løses ved separation:

$$\int \cos y dy = \int \sin t dt + C$$

Altså har vi

$$\sin y = C - \cos t \tag{1}$$

hvor C er en arbitrær konstant. Da det forlanges, at $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, fås

$$y = \arcsin\left(C - \cos t\right) \tag{2}$$

med C som en arbitrær konstant. Bemærk dog, at dette her ikke betyder, at alle værdier af C giver anledning til løsninger. Det indses let, at de tilladte værdier af C er givet ved $C \in \left]-2, 2\right[$.

Vi skal bestemme den løsning, der også opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$. Indsættelse af $t = 0$ og $y = 0$ i (1) giver $C = 1$, således at

$$y(t) = \arcsin\left(1 - \cos t\right)$$

Denne løsning er åbenbart defineret, når

$$-1 \leq 1 - \cos t \leq 1$$

altså for $\cos t \geq 0$. Da løsningens definitionsinterval skal indeholde tallet 0, hvor begyndelsesværdien er opgivet, bliver løsningens definitionsinterval $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.