MAT 91112 Opgave E34

Preben Alsholm

4/12 1998

Der er for $t > 0$ givet differentialligningen

$$tyy' = \sin t - y^2$$

Vi skal først finde den fuldstændige løsning ved at indføre en ny ubekendt funktion $v(t) = y(t)^2$. Vi finder $v'(t) = 2y(t)\,y'(t)$. Hermed kan den givne ligning skrives

$$\frac{1}{2}tv' = \sin t - v$$

der er lineær. Efter normering fås

$$v' + \frac{2}{t}v = \frac{2\sin t}{t}$$

Vi bruger Panserformlen. Vi finder $P(t) = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t = \ln\left(t^2\right)$, så $e^{P(t)} = t^2$ og $e^{-P(t)} = t^{-2}$. Hermed fås

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{t^2}\int t^2\frac{2\sin t}{t}dt + \frac{C}{t^2} = \frac{2}{t^2}\int t\sin t dt + \frac{C}{t^2} \\ &= \frac{2}{t^2}(\sin t - t\cos t) + \frac{C}{t^2} = \frac{2\sin t - 2t\cos t + C}{t^2} \end{aligned}$$

Altså finder vi

$$y(t) = \pm\sqrt{v(t)} = \pm\frac{1}{t}\sqrt{2\sin t - 2t\cos t + C}$$

hvor C er en arbitrær konstant.

Vi skal bestemme den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Ved indsættelse i den fuldstændige løsning fås

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{2}{\pi}\sqrt{2 + C}$$

Vi ser, at vi skal vælget positivt fortegn og $C = 0$. Hermed er den søgte løsning

$$y(t) = \frac{1}{t}\sqrt{2\sin t - 2t\cos t}$$

Vi skal nu vise, at definitionsintervallet for denne løsning indeholder intervallet $]0, \pi]$. Vi må forlange, at

$$2\sin t - 2t\cos t \geq 0$$

For $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fås $2\sin t - 2t\cos t = 2\cos t(\tan t - t) > 0$, da det vides, at $\tan t > t$, og da $\cos t > 0$ på dette interval. For $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ fås $2\sin t - 2t\cos t \geq 0$, da $\sin t \geq 0$ og da $\cos t \leq 0$. Hermed er påstanden vist.