MAT 91112 Opgave E 297

Preben Alsholm

5/12 1996

Funktionen F er givet ved forskriften

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(t^2+1\right) dt$$

for alle $x \in R$. Vi skal finde $F'(x), F''(x)$ og $F'''(x)$.

Vi finder

$$\begin{aligned} F'(x) &= \ln\left(x^2+1\right) \\ F''(x) &= \frac{2x}{x^2+1} \\ F'''(x) &= \frac{(x^2+1)\,2 - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Selv om det absolut er en dårlig idé at udregne integralet før det differentieres, skal det dog oplyses, at integralet faktisk kan udregnes. Det kan gøres som følger:

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln\left(t^2+1\right) dt &= \left[t\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^x - \int_0^x t\frac{2t}{t^2+1}dt \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - \int_0^x \frac{2t^2+2-2}{t^2+1}dt \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - \int_0^x \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt \\ &= x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan x. \end{aligned}$$