MAT 91112 Opgave E301

Preben Alsholm

5/12 1996

Der er givet differentialligningen

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = 5e^{-t}.$$

Dette er åbenbart en lineær differentialligning med konstante koefficienter.

1. Karakterligningen er $\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9 = 0$. Denne kan skrives $\lambda^2 (\lambda + 1) + 9 (\lambda + 1) = 0$ altså $(\lambda + 1) \left(\lambda^2 + 9\right) = 0$. Rødderne er -1 og $\pm 3i$. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$$

hvor c_1, c_2 og c_3 er arbitrære reelle konstanter.

2. En ansats til en partikulær løsning er $y_p = Ate^{-t}$, da e^{-t} er løsning til den homogene ligning. Vi finder

$$y_p' = Ae^{-t} - Ate^{-t},\ y_p'' = -2Ae^{-t} + Ate^{-t},\ y_p''' = 3Ae^{-t} - Ate^{-t}.$$

Ved indsættelse fås derfor

$$te^{-t} (-A + A + 9 (-A) + 9A) + e^{-t} (3A - 2A + 9A) = 5e^{-t}$$

der reducerer til

$$e^{-t} 10A = 5e^{-t}.$$

Altså fås, at $A = \frac{1}{2}$, så $y_p = \frac{1}{2} te^{-t}$. Dermed er den fuldstændige løsning

$$y(t) = \frac{1}{2} te^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$$

hvor c_1, c_2 og c_3 er arbitrære reelle konstanter.