MAT 91112 Opgave E8

Preben Alsholm

2/6 1997

Funktionerne F og f er givet ved

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sin x}{e^{2x}-1} \\ f(x) &= \frac{(e^{2x}+1)\cos x}{e^{4x}-1} - \frac{2e^{2x}\sin x}{(e^{2x}-1)^2} \end{aligned}$$

for alle $x \neq 0$. Vi skal først vise, at $F'(x) = f(x)$ for alle $x \neq 0$. Vi finder ved at opfatte $F(x)$ som produktet $\sin x \cdot \frac{1}{e^{2x}-1}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos x \cdot \frac{1}{e^{2x}-1} - \sin x \cdot \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \cos x \cdot \frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} - \sin x \cdot \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \cos x \cdot \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}-1} - \sin x \cdot \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = f(x) \end{aligned}$$

Dernæst skal vi undersøge, om det uegentlige integral $\int_0^\pi f(x)dx$ er konvergent. Vi finder

$$\int_c^\pi f(x) = [F(x)]_c^\pi = F(\pi) - F(c) = -F(c) = \frac{-\sin c}{e^{2c}-1}.$$

For $c \to 0^+$ fås "$\frac{0}{0}$", så vi bruger l'Hospital's regel:

$$\frac{-\cos c}{2e^{2c}} \to -\frac{1}{2} \text{ for } c \to 0^+.$$

Vi konkluderer, at $-F(c) \to -\frac{1}{2}$ for $c \to 0^+$, således at integralet $\int_0^\pi f(x)dx$ er konvergent med værdi $-\frac{1}{2}$.