MAT 91112 Opgave E11

Preben Alsholm

3/6 1997

Funktionen f er for $x > 0$ givet ved $f(x) = \sin(\ln x)$. Vi skal bestemme det andet Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt 1. Det andet Taylorpolynomium P_2 er givet ved

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2.$$

For de afledede finder vi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(\ln x)\frac{1}{x} \\
f''(x) &= -\sin(\ln x)\frac{1}{x^2} - \cos(\ln x)\frac{1}{x^2} \\
f'''(x) &= -\cos(\ln x)\frac{1}{x^3} + \sin(\ln x)\frac{2}{x^3} + \sin(\ln x)\frac{1}{x^3} + \cos(\ln x)\frac{2}{x^3} \\
&= \frac{3\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^3}
\end{aligned}$$

Hermed har vi $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1$, således at

$$P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2,$$

som det også er anført i opgaveteksten.

Vi skal dernæst vise, at

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 10^{-3}$$

for $|x-1| \leq 0.1$. Vi har for sådanne x, at der findes tal ξ mellem x og 1, så

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_2(x)| &= |R_2(x)| = \left|\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-1)^3\right| \\
&= \left|\frac{1}{3!}\frac{3\sin(\ln\xi) + \cos(\ln\xi)}{\xi^3}(x-1)^3\right| \\
&\leq \frac{1}{6}\frac{3\,|\sin(\ln\xi)| + |\cos(\ln\xi)|}{\xi^3}\,|x-1|^3 \\
&\leq \frac{1}{6}\frac{3+1}{0.9^3}\,|x-1|^3 \leq \frac{1}{6}\frac{4}{0.9^3}0.1^3 \\
&= 9.1449 \times 10^{-4} < 10^{-3}.
\end{aligned}$$