MAT 91112 Opgave E12

Preben Alsholm

3/6 1997

Der er for $t > 0$ givet differentialligningen

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + y = 2t.$$

Vi sætter $y(t) = tv(t)$. Hermed finder vi $y(t) = v(t) + tv'(t)$ og $y''(t) = 2v'(t) + tv''(t)$. Indsættelse i differentialligningen giver

$$t^2\left(2v'(t) + tv''(t)\right) - t\left(v(t) + tv'(t)\right) + tv(t) = 2t$$

der reduceres til

$$t^3 v''(t) + t^2 v'(t) = 2t$$

Vi sætter i den fundne ligning $w = v'$. Hermed fås

$$t^3 w' + t^2 w = 2t$$

Denne ligning er lineær og af første orden. Den kan løses ved brug af Panserformlen

$$w(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)dt + c_1 e^{-P(t)}$$

der gælder for en normeret ligning:

$$w' + \frac{1}{t}w = \frac{2}{t^2}.$$

Vi finder $P(t) = \int \frac{1}{t}dt = \ln t$, så $e^{P(t)} = e^{\ln t} = t$ og $e^{-P(t)} = \frac{1}{t}$. Hermed har vi

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{t}\int t\frac{2}{t^2}dt + \frac{C}{t} = \frac{1}{t}\int \frac{2}{t}dt + \frac{c_1}{t} \\ &= \frac{2\ln t}{t} + \frac{c_1}{t} \end{aligned}$$

Af $v' = w$ fås nu ved integration

$$v(t) = \int \left(\frac{2\ln t}{t} + \frac{c_1}{t}\right) dt = (\ln t)^2 + c_1 \ln t + c_2.$$

Da $y(t) = tv(t)$, fås derfor, at den fuldstændige løsning til den oprindelige ligning er givet ved

$$y(t) = t\left(\ln t\right)^2 + c_1 t \ln t + c_2 t$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære reelle konstanter.