MAT 91112 Opgave E26

Preben Alsholm

15/5 1998

Der er givet funktionen f ved forskriften

$$f(x) = \int_e^x \ln(\ln t)\, dt$$

for alle $x > 1$. Vi bliver advaret mod forsøg på at udregne integralet. Maple kan dog udregne integralet, idet den kan udtrykke dette v.hj.a. eksponentialintegral-funktionen Ei. Den finder $x\ln(\ln x) + \mathrm{Ei}(1, -\ln x) - \mathrm{Ei}(1, -1)$.

Vi skal bestemme det 2. Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt e. For de afledede finder vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(\ln x) \\ f''(x) &= \frac{1}{x\ln x} \\ f'''(x) &= -\frac{1}{x^2\ln x} - \frac{1}{x^2(\ln x)^2} = -\frac{\ln x + 1}{x^2(\ln x)^2} \end{aligned}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(e) + f'(e)(x-e) + \frac{1}{2}f''(e)(x-e)^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{e}(x-e)^2 = \frac{1}{2e}(x-e)^2 \end{aligned}$$

Ved v.hj.a. Taylors formel finder vi

$$f(x) - P_2(x) = R_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-e)^3$$

hvor ξ ligger mellen x og e. Da $f'''(\xi) = -\frac{\ln\xi + 1}{\xi^2(\ln\xi)^2} < 0$, ser vi, at $f(x) - P_2(x)$ har modsat fortegn af $(x-e)^3$. Heraf følger, at $f(x) - P_2(x) > 0$ for $x < e$, og $f(x) - P_2(x) < 0$ for $x > e$, hvilket umiddelbart giver det vi skulle vise.

Vi skal nu vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_2(x)$, når $x \in [2.5, 3]$. Vi finder

$$\begin{aligned} |f(x) - P_2(x)| &= \left|\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-e)^3\right| \\ &= \left|\frac{1}{3!}\frac{\ln\xi + 1}{\xi^2(\ln\xi)^2}(x-e)^3\right| \\ &\leq \frac{1}{3!}\frac{\ln 3 + 1}{2.5^2(\ln 2.5)^2}\left|(3-e)^3\right| \cong 1.49 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

der tydeligvis er mindre end 2.5×10^{-3}. Det kan bemærkes, at en lidt bedre vurdering kan opnås, hvis de to led i $f'''(x)$ ikke sættes på fælles brøkstreg men beholdes som $-\frac{1}{x^2\ln x} - \frac{1}{x^2(\ln x)^2}$. Her fås 1.36×10^{-3}. Yderligere kan bemærkes, at da $f'''(x)$ ikke skifter fortegn (end ikke i udviklingspunktet), antages den maksimale fejl i et af endepunkterne af intervallet $[2.5, 3]$. Den maksimale fejl er faktisk 0.93×10^{-3}.