MAT 91112 Opgave E27

Preben Alsholm

15/5 1998

Der er givet integralet

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$$

Integralet er uegentligt, da $\ln(\sin x) \to -\infty$ for $x \to 0^+$.

Vi betragter den viste udledning:

$$\begin{aligned}
\int_c^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx &= \int_c^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \ln(\sin x)\, dx \\
&= [x \ln(\sin x)]_c^{\pi/2} - \int_c^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx \qquad (*)
\end{aligned}$$

Det helt integrerede led bliver

$$\begin{aligned}
[x \ln(\sin x)]_c^{\pi/2} &= \frac{\pi}{2} \ln \sin \frac{\pi}{2} - c \ln(\sin c) \\
&= -c \ln(\sin c) = -\frac{\ln(\sin c)}{1/c}
\end{aligned}$$

Dette sidste udtryk får åbenbart den ubestemte form "$\frac{\infty}{\infty}$" for $c \to 0^+$. Vi bruger l'Hospitals regel:

$$-\frac{\frac{\cos c}{\sin c}}{-\frac{1}{c^2}} = \frac{c^2 \cos c}{\sin c} = c \frac{c}{\sin c} \cos c \to 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

for $c \to 0^+$. Altså fås $[x \ln(\sin x)]_c^{\pi/2} = -\frac{\ln(\sin c)}{1/c} \to 0$ for $c \to 0^+$.

Regningerne i opgaven har nu givet, at A kan skrives som

$$A = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx$$

og som det bemærkes i opgaven, er dette et egentligt integral. Ifølge Simpsons formel fås med $n = 4, h = \frac{\pi/2}{4} = \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{\pi}{24}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{24}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Idet integranden er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -x \cot x & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

fås med 5 betydende cifre

$$S_4 = -1.0884$$

Til sammenligning er den eksakte værdi af integralet $-\frac{\pi}{2}\ln 2 \cong -1.088\,793\,046$.

Den eksakte værdi kan morsomt nok udregnes på elementær vis som følger. Det indses let, at

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$$

derfor fås

$$\begin{aligned}
2A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(\sin 2x)\right)dx \\
&= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt \\
&= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + A
\end{aligned}$$

Heraf følger åbenbart, at $A = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.