MAT 91122 Opgave E44

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Der er givet differentialformen

$$\omega = \left(4x^3y + 2x^3\right) dx + \left(x^4 + e^y\right) dy$$

Vi skal vise, at ω er eksakt i R^2 og finde samtlige stamfunktioner.

Med

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= 4x^3y + 2x^3 \\ F_2(x,y) &= x^4 + e^y \end{aligned}$$

har vi, at F_1 og F_2 har kontinuerte partielle afledede i hele den åbne og enkelt-sammenhængende mængde R^2. Da vi har

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4x^3 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

overalt i R^2, er ω derfor eksakt i R^2.

Vi skal nu bestemme en stamfunktion f. Denne må opfylde

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= F_1(x,y) = 4x^3y + 2x^3 \\ f_y(x,y) &= F_2(x,y) = x^4 + e^y \end{aligned}$$

Af den første fås ved ubestemt integration mht. x

$$f(x,y) = x^4y + \frac{1}{2}x^4 + h(y)$$

hvor h er en ukendt funktion. Af dette resultat fås

$$f_y(x,y) = x^4 + h'(y)$$

Ved sammenligning med kravet $f_y(x,y) = F_2(x,y)$ fås

$$h'(y) = e^y$$

hvorfor vi finder, at

$$h(y) = e^y + C$$

hvor C er en arbitrær konstant. Altså er samtlige stamfunktioner givet ved formlen

$$f(x,y) = x^4y + \frac{1}{2}x^4 + e^y + C$$

hvor $C \in R$.