MAT 91122 Opgave E51

Preben Alsholm

Januar 2001

Der er givet differentialformen

$$\omega = \left(2xe^{2y} + 12x^2\right) dx + \left(2x^2 + 2\right) e^{2y} dy$$

Vi skal vise, at ω er eksakt i R^2 og finde kurveintegralet

$$\int_k \omega$$

hvor k er kurven givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Med $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ fås ved krydsdifferentiation

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4xe^{2y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

gældende overalt i R^2. Vi konkluderer, at ω er eksakt i R^2.

Kurven k begynder i punktet $(0,0)$ og ender i punktet $(2\pi, 0)$. Da ω er eksakt, kan kurveintegralet i stedet udregnes langs det rette liniestykke, der forbinder disse to punkter $(x, y) = (t, 0), t \in [0, 2\pi]$. Vi finder derfor:

$$\int_k \omega = \int_0^{2\pi} \left(2t + 12t^2\right) dt = \left[t^2 + 4t^3\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 + 32\pi^3$$

Alternativt kan en stamfunktion f bestemmes. Stamfunktionen opfylder (1) $f_x(x, y) = 2xe^{2y} + 12x^2$ og (2) $f_y(x, y) = \left(2x^2 + 2\right) e^{2y}$. Af (1) fås

$$f(x, y) = x^2 e^{2y} + 4x^3 + h(y)$$

hvor h må bestemmes ud fra krav (2). Ved differentiation af det nys opnåede udtryk for f fås

$$f_y(x, y) = 2x^2 e^{2y} + h'(y)$$

Sammenholdes dette med (2), fås

$$h'(y) = 2e^{2y}$$

Altså må $h(y)$ være givet ved $h(y) = e^{2y} + C$, hvor C er en arbitrær konstant. Hermed ses, at samtlige stamfunktioner er givet ved formlen

$$f(x, y) = x^2 e^{2y} + 4x^3 + e^{2y} + C$$

med $C \in R$. Kurveintegralet kan nu findes således:

$$\int_k \omega = f(2\pi, 0) - f(0, 0) = 4\pi^2 + 32\pi^3$$