MAT 91122 Opgave E7

Preben Alsholm

27/5 1997

Funktionen f er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{for} \quad t < 2 \\ 2e^{2-t} & \text{for} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Vi skal løse differentialligningen

$$x'(t) + x(t) = f(t) \tag{1}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 0$. Vi løser problemet ved Laplacetransformation. Først udtrykker vi f ved Heavisides funktion u:

$$f(t) = t + u(t-2)\left(-t + 2e^{2-t}\right)$$

Ved Laplacetransformation heraf fås

$$\begin{aligned} F(s) &= L(f) = \frac{1}{s^2} + e^{-2s} L\left(-(t+2) + 2e^{2-(t+2)}\right) \\ &= \frac{1}{s^2} + e^{-2s} L\left(-t - 2 + 2e^{-t}\right) = \frac{1}{s^2} + e^{-2s}\left(-\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1}\right). \end{aligned}$$

Af (1) fås ved Laplacetransformation, idet X betegner den Laplacetransformerede af x:

$$sX(s) - x(0) + X(s) = F(s)$$

Altså

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{F(s)}{s+1} = \frac{\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\left(-\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1}\right)}{s+1} \\ &= \frac{1}{s^2(s+1)} + e^{-2s}\left(-\frac{1}{s^2(s+1)} - \frac{2}{s(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Hermed findes ved tilbagetransformation

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} - 1 + t + \left[-e^{-t} + 1 - t - 2 + 2e^{-t} + 2te^{-t}\right]_{\text{forsinket } 2} \\ &= e^{-t} - 1 + t + \left[e^{-t} - t - 1 + 2te^{-t}\right]_{\text{forsinket } 2} \\ &= e^{-t} - 1 + t + u(t-2)\left(e^{2-t} + 1 - t + 2(t-2)e^{2-t}\right) \\ &= e^{-t} - 1 + t + u(t-2)\left((2t-3)e^{2-t} + 1 - t\right). \end{aligned}$$