MAT 91121-22 Opgave E33

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Vi skal finde største- og mindsteværdi for

$$f(x,y) = x^2 e^{-x^2-y^2} + y^2$$

på cirkelskiven $S = \left\{ (x,y) \left| x^2+y^2 \le 4 \right. \right\}$.

1. **Vi bestemmer stationære punkter**. Vi finder

   $$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{-x^2-y^2} - 2x^3 e^{-x^2-y^2} = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x)(1+x) \\ f_y(x,y) &= -2x^2 y e^{-x^2-y^2} + 2y = 2y\left(1 - x^2 e^{-x^2-y^2}\right) \end{aligned}$$

   Altså finder vi

   $$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \iff \\ & (x=0 \lor x=1 \lor x=-1) \land \left(y=0 \lor 1 - x^2 e^{-x^2-y^2} = 0\right) \\ \iff & (x,y) = (0,0) \lor (x,y) = (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

   idet $1 - x^2 e^{-x^2-y^2} > 0$, når $x = 0 \lor x = 1 \lor x = -1$. De stationære punkter er altså $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Disse punkter ligger alle i det indre af S.

2. **Randundersøgelse**. På randen har vi, at $y^2 = 4 - x^2$, således at

   $$f(x,y) = x^2 e^{-4} + 4 - x^2 = 4 - \left(1 - e^{-4}\right) x^2 = g(x)$$

   Denne funktion g skal vi minimere og maximere på intervallet $[-2, 2]$. Dette kræver ikke den store undersøgelse. Vi har klart, at mindsteværdien er $g(\pm 2) = 4e^{-4}$ og størsteværdien er $g(0) = 4$.

3. **Konklusion**. Da $f(0,0) = 0$ og $f(\pm 1, 0) = e^{-1}$, ses det ved sammenligning med randværdierne, at størsteværdien for f på S er 4 og mindsteværdien er 0.