MAT 91121-22 Opgave E5

Preben Alsholm

27/5 1997

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - 4x^2 + y$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Vi skal bestemme største- og mindsteværdi for f på området S indenfor eller på niveaukurven $f(x,y) = -\frac{1}{4}$. Vi bemærker først, at randundersøgelsen er aldeles triviel, eftersom f overalt på randen har værdien $-\frac{1}{4}$. De stationære punkter skal bestemmes. Vi finder:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 8x^3 + 8xy^2 - 8x = 8x\left(x^2+y^2-1\right) \\ f_y(x,y) &= 8x^2y + 8y^3 + 1 \end{aligned}$$

så vi finder

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow \left(x = 0 \vee x^2+y^2 = 1\right) \wedge 8x^2y + 8y^3 + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,-\frac{1}{2}) \vee \left(x^2+y^2 = 1 \wedge 8\left(1-y^2\right)y + 8y^3 + 1 = 0\right) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,-\frac{1}{2}) \vee \left(x^2+y^2 = 1 \wedge 8y + 1 = 0\right) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = \left(0,-\frac{1}{2}\right) \vee (x,y) = \left(\frac{3}{8}\sqrt{7},-\frac{1}{8}\right) \vee (x,y) = \left(-\frac{3}{8}\sqrt{7},-\frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

Vi har altså fundet 3 stationære punkter, nemlig $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{8}\sqrt{7},-\frac{1}{8}\right)$ og $\left(-\frac{3}{8}\sqrt{7},-\frac{1}{8}\right)$. Da $\frac{3}{8}\sqrt{7} \cong .99216$ ses det, at alle 3 stationære punkter ligger i det indre af S. Vi finder

$$f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \text{ og } f\left(\pm\frac{3}{8}\sqrt{7},-\frac{1}{8}\right) = -\frac{33}{16}$$

Vi konkluderer, at størsteværdien for f på S er $-\frac{1}{4}$ (antages på randen) og mindsteværdien er $-\frac{33}{16}$ (antages i to af de stationære punkter).

Vi skal nu bestemme største- og mindsteværdi for f på den delmængde af S, der ligger i den lukkede 1. kvadrant. Funktionen har ingen stationære punkter i dette område, så største- og mindsteværdi antages på randen. På den del af randen, der udgøres af et interval på x-aksen, har f værdien

$$f(x,0) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2\left(x^2 - 2\right) \equiv g(x)$$

Denne størrelse er åbenbart mindst for $x^2 = 1$ og størst i yderpunkterne af intervallet, og dér må værdien jo være $-\frac{1}{4}$. Da $g(1) = -2$, finder vi altså, at størsteværdien er $-\frac{1}{4}$ og mindsteværdien -2.