MAT 91122 Opgave E52

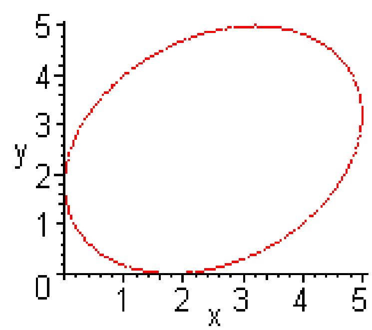
Preben Alsholm

Januar 2001

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = 25\left(x^2+y^2\right) - 14xy - 90(x+y)$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Her er S området indenfor eller på niveaukurven $f(x,y) = -81$. Niveaukurven (en ellipse) er vist på figuren.



Vi skal finde største- og mindsteværdi for f på S.

Vi bestemmer først de stationære punkter. Hertil skal bruges de partielle afledede:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 50x - 14y - 90 \\ f_y(x,y) &= 50y - 14x - 90 \end{aligned}$$

De stationære punkter er bestemt ved $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Vi finder

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 50x - 14y = 90 \wedge -14x + 50y = 90$$

Løsningen af disse to lineære ligninger kan f.eks. ske ved brug af Cramers metode (determinantmetoden):

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 90 & -14 \\ 90 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & -14 \\ -14 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{5760}{2304} = \frac{5}{2} \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} 50 & 90 \\ -14 & 90 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & -14 \\ -14 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{5760}{2304} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Der er altså ét stationært punkt, og det er $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Vi bemærker, at dette punkt ligger i det indre af S.

Randundersøgelsen er hurtigt overstået, da randen er en niveaukurve for f med niveau -81. Denne værdi skal nu sammenlignes med værdien af f i det stationære punkt. Vi finder

$$f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = -225$$

Konklusionen er, at størsteværdien for f på S er -81, og mindsteværdien er -225.