MAT 91122 Opgave E28

Preben Alsholm

9/12 1998

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) = -ax(t) + f(t)$$

hvor a er en positiv konstant og f er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{for} \quad t < 1 \\ 0 & \text{for} \quad 1 \leq t \end{cases}$$

og hvor begyndelsesbetingelsen er $x(0) = 0$.

1. Vi skal finde den Laplacetransformerede $\overline{x}(s)$ af løsningen $x(t)$. Ved brug af differentiationsreglen fås

$$s\overline{x}(s) - x(0) = -a\overline{x}(s) + \overline{f}(s)$$

så

$$\overline{x}(s) = \frac{\overline{f}(s)}{s+a}$$

Vi omskriver f ved brug af Heavisides funktion u.

$$f(t) = 1 - t^2 + u(t-1)\left(-1 + t^2\right)$$

Hermed fås

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-s} L\left(-1 + (t+1)^2\right) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-s} L\left(t^2 + 2t\right) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} \overline{x}(s) &= \frac{\overline{f}(s)}{s+a} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right)}{s+a} \\ &= \frac{s^2 - 2 + 2(1+s)e^{-s}}{s^3(s+a)} \end{aligned}$$

2. Det kan anses for givet, at $\lim_{t\to\infty} e^{at}x(t)$ eksisterer. Det oplyses desuden, at der gælder følgende generelle formel

$$L\left(e^{at} g(t)\right) = \overline{g}(s-a)$$

("forskydningsreglen"). Vi skal finde

$$\lim_{t\to\infty} e^{at}x(t)$$

Vi har

$$L\left(e^{at}x(t)\right) = \overline{x}\,(s-a) = \frac{(s-a)^2 - 2 + 2\,(1+s-a)\,e^{-(s-a)}}{(s-a)^3\,s}$$

Vi bruger slutværdireglen

$$\begin{aligned} sL\left(e^{at}x(t)\right) &= s\overline{x}\,(s-a) \\ &= \frac{(s-a)^2 - 2 + 2\,(1+s-a)\,e^{-(s-a)}}{(s-a)^3} \\ &\to -\frac{a^2 - 2 + 2\,(1-a)\,e^{a}}{a^3} \end{aligned}$$

for $s \to 0_+$. Dermed har vi, at

$$\lim_{t\to\infty} e^{at}x(t) = -\frac{a^2 - 2 + 2\,(1-a)\,e^{a}}{a^3}$$