MAT 91122 Opgave E17

Preben Alsholm

13/5 1998

Vi skal løse differentialligningen

$$x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = x_0$. Dette kan gøres på mindst 3 måder:

1.Laplacetransformation. Vi finder

$$s\overline{x}(s) - x(0) + 2\overline{x}(s) = \frac{1}{s+1}$$

hvoraf fås

$$(s+2)\,\overline{x}(s) - x_0 = \frac{1}{s+1}$$

altså

$$\begin{aligned} \overline{x}(s) &= \frac{x_0}{s+2} + \frac{1}{(s+1)\,(s+2)} \\ &= \frac{x_0}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{x_0 - 1}{s+2} + \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Ved tilbagetransformation fås

$$x(t) = (x_0 - 1)\,e^{-2t} + e^{-t}$$

2.Differentialligningen er lineær og har konstante koefficienter. Karakterligningen er $\lambda + 2 = 0$ med rod -2. Fuldstændig løsning til den homogene ligning er $x(t) = ce^{-2t}, c \in R$. Ansats til en partikulær løsning til den inhomogene ligning: $x_p(t) = Ae^{-t}$. Da $x_p'(t) = -Ae^{-t}$, fås ved indsættelse, at

$$-Ae^{-t} + 2Ae^{-t} = e^{-t}$$

hvoraf ses, at $A = 1$. Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er derfor

$$x(t) = e^{-t} + ce^{-2t}, c \in R.$$

Vi skal nu bestemme konstanten c så $x(0) = x_0$. Vi finder ved indsættelse, at $x_0 = x(0) = 1 + c$, så $c = x_0 - 1$. Hermed har vi fundet samme løsning som ved Laplacetransformation.

3.Panserformlen kan bruges:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t} \int e^{2t} e^{-t} dt + Ce^{-2t} \\ &= e^{-2t} \int e^{t} dt + Ce^{-2t} = e^{-2t} e^{t} + Ce^{-2t} = e^{-t} + Ce^{-2t} \end{aligned}$$

hvor C er en arbitrær konstant. Denne bestemmes udfra begyndelsesbetingelsen som ovenfor.