MAT 91122 Opgave E39

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Opgaven lyder: Det oplyses, at ligningen

$$y^5 + 2x^3 + 2y + x - 6 = 0$$

i R^2 fastlægger y som en vilkårligt ofte differentiabel funktion $y(x)$.

1. (a) Vis, at $(x, y) = (1, 1)$ tilfredsstiller ligningen.
   (b) Find det 2.Taylorpolynomium $P_2(x)$ for $y(x)$ med udviklingspunkt 1.
   (c) Tegn Taylorpolynomiets graf for $0 \leq x \leq 2$. Dette spørgsmål tillades også løst ved blot at anføre alle de nødvendige Maple-kommandoer.

Første spørgsmål løses ved simpel indsættelse af $x = 1$ og $y = 1$:

$$1 + 2 + 2 + 1 - 6 = 0$$

som jo passer.

Vi skal finde

$$P_2(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)(x-1)^2$$

Åbenbart er $y(1) = 1$, da $(x, y) = (1, 1)$ passede ind i ligningen. Ved differentiation af identiteten

$$y(x)^5 + 2x^3 + 2y(x) + x - 6 = 0$$

fås

$$5y(x)^4 y'(x) + 6x^2 + 2y'(x) + 1 = 0$$

Ved indsættelse af $x = 1$ fås

$$5y'(1) + 6 + 2y'(1) + 1 = 0$$

altså $y'(1) = -1$. Ved endnu en differentiation fås

$$20y(x)^3 y'(x)^2 + 5y(x)^4 y''(x) + 12x + 2y''(x) = 0$$

Ved indsættelse af $x = 1$, fås

$$20 + 5y''(1) + 12 + 2y''(1) = 0$$

altså $y''(1) = -\frac{32}{7}$. Hermed har vi

$$P_2(x) = 1 - (x-1) - \frac{16}{7}(x-1)^2$$