MAT 91122 Opgave E26

Preben Alsholm

9/12 1998

Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = x^2y + \cos(x+y)$$

for alle $(x,y) \in R^2$.

1.Vi skal vise, at ethvert punkt af formen $(0, p\pi)$, hvor p er et helt tal, er et stationært punkt for f. Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy - \sin(x+y) \\ f_y(x,y) &= x^2 - \sin(x+y) \end{aligned}$$

Hermed har vi

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \iff 2xy - \sin(x+y) = 0 \wedge x^2 - \sin(x+y) = 0 \\ &\iff 2xy = x^2 \wedge x^2 = \sin(x+y) \iff x(x-2y) = 0 \wedge x^2 = \sin(x+y) \\ &\iff ((x,y) = (0,p\pi) \wedge p \in Z) \vee \left(x = 2y \wedge x^2 = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right) \end{aligned}$$

Hermed konstaterer vi altså, at alle punkterne $(0, p\pi), p \in Z$, er stationære punkter. Vi ser også, at evt. yderligere stationære punkter opfylder

$$x = 2y \wedge x^2 = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

2.Vi får oplyst, at f desuden har endnu ét stationært punkt Q, og at dette ligger tæt ved $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Vi har allerede vist, at dette punkts x-koordinat opfylder ligningen

$$x^2 - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0$$

Vi skal nu løse denne ligning ved brug af Newtons metode med startgæt $x_0 = 1$. Vi skal kun bestemme x_1. Vi finder

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2 - \sin\left(\frac{3}{2}x_0\right)}{2x_0 - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3}{2}x_0\right)} \\ &= 1 - \frac{1 - \sin\left(\frac{3}{2}\right)}{2 - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3}{2}\right)} = 0.998\,68 \end{aligned}$$

Derved opnås samtidigt følgende forbedrede tilnærmelse til $Q's$ y-koordinat: $y_1 = \frac{1}{2}x_1 = 0.499\,34$

3.Efter den definition, som vi bruger på et saddelpunkt, er det ikke svært at vise, at det stationære punkt $(0,0)$ hverken er et lokalt ekstremum eller et saddelpunkt. Det skal vi imidlertid ikke gøre. Men vi skal for ethvert af de øvrige stationære punkter afgøre, om det er et saddelpunkt eller ej. Vi finder

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2y - \cos(x+y) \\ f_{xy}(x,y) &= 2x - \cos(x+y) \\ f_{yy}(x,y) &= -\cos(x+y) \end{aligned}$$

Med $D = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ fås i punkterne $(0,p\pi)$, idet vi benytter, at $\cos(x+y) = \cos(p\pi) = (-1)^p$,

$$D(0,p\pi) = (-1)^{2p} - (2p\pi - (-1)^p)(-1)^{p+1} = 2p\pi(-1)^p$$

Hermed ser vi, at punktet $(0,p\pi)$ er et saddelpunkt, netop når enten p er positiv og lige eller p er negativ og ulige. For det stationære punkt Q benytter vi tilnærmelsen $Q \approx \left(1, \frac{1}{2}\right)$. Vi finder

$$D\left(1,\frac{1}{2}\right) = \left(2 - \cos\frac{3}{2}\right)^2 - \left(1 - \cos\frac{3}{2}\right)\left(-\cos\frac{3}{2}\right) \cong 3.7878 > 0$$

Altså er Q også et saddelpunkt.