MAT 91122 Opgave E11

Preben Alsholm

5/12 1997

Der er givet ligningen

$$\sinh(x+2y) = \sin(2x+y)$$

Denne ligning beskriver en kurve, der oplyses at være grafen for en vilkårligt ofte differentiabel funktion g. Vi skal finde denne funktions 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0. Dette er givet ved

$$P_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2$$

Da kurven går gennem (0,0) har vi, at $g(0) = 0$. Ved differentiation i identiteten

$$\sinh(x+2g(x)) = \sin(2x+g(x))$$

fås

$$\cosh(x+2g(x))\,(1+2g'(x)) = \cos(2x+g(x))\,(2+g'(x))$$

Ved indsættelse af $x = 0$ fås $1 + 2g'(0) = 2 + g'(0)$. Altså har vi $g'(0) = 1$. Ved fornyet differentiation finder vi

$$\begin{aligned} & \sinh(x+2g(x))\,(1+2g'(x))^2 + \cosh(x+2g(x))\,2g''(x) \\ = \quad & -\sin(2x+g(x))\,(2+g'(x))^2 + \cos(2x+g(x))\,g''(x) \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $x = 0$ fås $2g''(0) = g''(0)$. Altså $g''(0) = 0$. Hermed har vi

$$P_2(x) = x.$$

Den positive løsning til ligningen $g(x) = 0$ er det punkt på x - aksen, hvor kurven skærer denne. Dette punkt er altså løsning til ligningen

$$\sinh(x) = \sin(2x)$$

Punktet ses på figuren at være ca. 0.8. Vi sætter derfor $x_0 = 0.8$. Newtons metode giver med $f(x) = \sinh x - \sin(2x)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sinh x_0 - \sin(2x_0)}{\cosh x_0 - 2\cos(2x_0)} \cong 0.879857$$

Ved næste iteration fås $x_2 = 0.871107$. Tredie iteration giver $x_3 = 0.870998$. Med to betydende cifre må roden være 0.87.