MAT 91122 Opgave E21

Preben Alsholm

13/5 1998

Der er givet et system af differentialligninger

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + y(t) + f(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - y(t) \end{aligned}$$

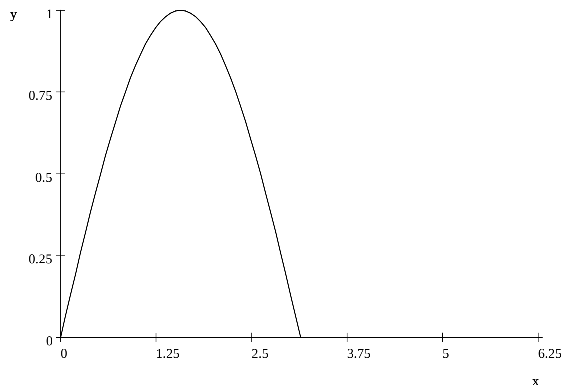
hvor f er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{for} \quad t < \pi \\ 0 & \text{for} \quad \pi \leq t \end{cases}$$

og hvor $x(0) = 0 = y(0)$.

Vi skal skitsere f på intervallet $[0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} \sin t & \text{if} \quad t < \pi \\ 0 & \text{if} \quad \pi \leq t \end{cases}$$



Udtrykkes f ved Heaviside-funktioner fås

$$f(t) = \sin t + u(t - \pi)(-\sin t) = \sin t - u(t - \pi)\sin t$$

hvor u er Heavisides funktion.

Ved Laplacetransformation af ligningssystemet fås

$$\begin{aligned} s\overline{x}(s) - x(0) &= -2\overline{x}(s) + \overline{y}(s) + \overline{f}(s) \\ s\overline{y}(s) - y(0) &= 2\overline{x}(s) - \overline{y}(s) \end{aligned}$$

Altså

$$\begin{aligned} (s+2)\,\overline{x}(s) - \overline{y}(s) &= \overline{f}(s) \\ -2\overline{x}(s) + (s+1)\,\overline{y}(s) &= 0 \end{aligned}$$

Heraf finder vi

$$\overline{x}(s) = \frac{\begin{vmatrix} \overline{f}(s) & -1 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{\overline{f}(s)\,(s+1)}{s^2+3s} = \frac{\overline{f}(s)\,(s+1)}{s\,(s+3)}$$

Vi finder

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &= \frac{1}{1+s^2} - e^{-\pi s} L\left(\sin\left(t+\pi\right)\right) = \frac{1}{1+s^2} - e^{-\pi s} L\left(-\sin t\right) \\ &= \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2} = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2} \end{aligned}$$

Altså fås

$$\overline{x}(s) = \frac{(s+1)\left(1+e^{-\pi s}\right)}{s\,(s+3)\left(1+s^2\right)}$$

Vi får oplyst, at $\lim_{t\to\infty} x(t)$ eksisterer. Denne grænseværdi kan da bestemmes ved hjælp af slutværdireglen:

$$s\overline{x}(s) = \frac{s\,(s+1)\left(1+e^{-\pi s}\right)}{s\,(s+3)\left(1+s^2\right)} = \frac{(s+1)\left(1+e^{-\pi s}\right)}{(s+3)\left(1+s^2\right)} \to \frac{2}{3}$$

for $s \to 0^+$. Altså har vi, at $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{2}{3}$.