MAT 91121-22 Opgave E3

Preben Alsholm

27/5 1997

Der er givet differentialformen

$$\omega = \left(ye^{xy} + 3x^2\right) dx + (xe^{xy} - \sin y - y \cos y)\, dy$$

i R^2. Vi skal vise, at den er eksakt. Idet vi skriver $\omega = F_1 dx + F_2 dy$, finder vi

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

overalt i R^2. Altså er ω eksakt i R^2.

Idet en stamfunktion betegnes med f har vi

$$f_x(x, y) = F_1 = ye^{xy} + 3x^2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = F_2 = xe^{xy} - \sin y - y \cos y \quad (2)$$

Af (1) fås ved integration m.h.t. x

$$f(x, y) = e^{xy} + x^3 + h(y) \quad (3)$$

hvor h er en ubekendt funktion. Af (3) fås

$$f_y(x, y) = xe^{xy} + h'(y) \quad (4)$$

Sammenholdes (4) med (2), fås

$$h'(y) = -\sin y - y \cos y$$

Ved integration heraf fås

$$h(y) = -y \sin y + C$$

hvor C er en arbitrær reel konstant. Hermed er samtlige stamfunktioner bestemt. De er givet ved formlen

$$f(x, y) = e^{xy} + x^3 - y \sin y + C$$

hvor C er en arbitrær reel konstant.