MAT 91121-22 Opgave E4

Preben Alsholm

27/5 1997

Det er givet, at kurven med ligningen

$$x^5y + xy^5 = 2 \tag{1}$$

for $x > 0$ er grafen for en vilkårligt ofte differentiabel funktion h. Om h vides så, at

$$x^5h(x) + xh(x)^5 = 2 \tag{2}$$

for alle $x > 0$. Vi skal bestemme det andet Taylorpolynomium P_2 for h med udviklingspunkt 1:

$$P_2(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + \frac{1}{2}h''(1)(x-1)^2 \tag{3}$$

Ved indsættelse af $x = 1$ i (2) fås $h(1) + h(1)^5 = 2$. Vi ser, at $h(1) = 1$. Ved differentiation af (2) fås

$$5x^4h(x) + x^5h'(x) + h(x)^5 + 5xh(x)^4h'(x) = 0 \tag{4}$$

Ved indsættelse af $x = 1$ heri fås $5 + h'(1) + 1 + 5h'(1) = 0$, altså $h'(1) = -1$. Ved differentiation af (4) fås

$$20x^3h(x)+10x^4h'(x)+x^5h''(x)+10h(x)^4h'(x)+20xh(x)^3h'(x)^2+5xh(x)^4h''(x) = 0$$

Ved indsættelse af $x = 1$ heri fås $20 - 10 + h''(1) - 10 + 20 + 5h''(1) = 0$, så $h''(1) = -\frac{10}{3}$. Altså har vi

$$P_2(x) = 1 - (x-1) - \frac{5}{3}(x-1)^2 = 2 - x - \frac{5}{3}(x-1)^2.$$