MAT 91122 Opgave E10

Preben Alsholm

5/12 1997

Der er i R^2 givet differentialformen

$$\omega = \left(y^2 e^x + 12x^3\right) dx + (2ye^x + \cos y)\, dy$$

Vi skal vise, at ω er eksakt i R^2.

Vi finder, idet $F_1(x,y) = y^2e^x + 12x^3$ og $F_2(x,y) = 2ye^x + \cos y$, at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2ye^x = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Da også F_1 og F_2 har kontinuerte partielle afledede i hele R^2, konkluderer vi, at ω er eksakt i R^2. Lad f betegne en stamfunktion. Da $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x,y) = y^2e^x + 12x^3$, fås $f(x,y) = y^2e^x + 3x^4 + h(y)$, hvor h er en ukendt funktion. Heraf fås $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x + h'(y)$. Men da $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x,y) = 2ye^x + \cos y$, fås $h'(y) = \cos y$. Altså $h(y) = \sin y + C$, hvormed vi konkluderer, at samtlige stamfunktioner er givet ved

$$f(x,y) = y^2e^x + 3x^4 + \sin y + C$$

hvor C er en arbitrær konstant.

Kurveintegralet beregnes lettest ved brug af en stamfunktion:

$$\int_k \omega = f(1,1) - f(0,0) = e + 1 + \sin 1$$

Kurveintegralet kan dog også udregnes efter definitionen (hvilket dog er betydeligt mere besværligt):

$$\int_k \omega = \int_0^1 \left[\left(t^2e^{t^2} + 12t^6\right)2t + \left(2te^{t^2} + \cos t\right)\right] dt = e + 1 + \sin 1$$