MAT 91122 Opgave E13

Preben Alsholm

5/12 1997

Vi skal udregne planintegralet

$$\iint_S (x+2y)\,dA$$

over området begrænset af kurven $r=\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$, og af den positive del af x - aksen. Vi finder, idet vi bruger polære koordinater,

$$\begin{aligned}
\iint_S (x+2y)\,dA &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} (r\cos\theta + 2r\sin\theta)\,r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} (\cos\theta + 2\sin\theta)\,r^2 dr \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta)\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta)\,\theta^3 d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \theta^3\cos\theta d\theta + \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \theta^3 \sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\theta^3\sin\theta + 3\theta^2\cos\theta - 6\cos\theta - 6\theta\sin\theta\right]_0^{2\pi} \\
&\quad + \frac{2}{3}\left[-\theta^3\cos\theta + 3\theta^2\sin\theta - 6\sin\theta + 6\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi^2 + 8\pi - \frac{16}{3}\pi^3.
\end{aligned}$$

Maple kunne bruges enten på dobbeltintegralet $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} (\cos\theta + 2\sin\theta)\,r^2 dr$ eller på integralet $\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta)\,\theta^3 d\theta$. Følgende kommandoer kan bruges i de to tilfælde:

1.int(int(r^2*(cos(t)+2*sin(t)), r=0..t), t=0..2*Pi);

2.int((cos(t)+2*sin(t))*t^3/3, t=0..2*Pi);