MAT 91122 Opgave E14

Preben Alsholm

5/12 1997

Et givet fysisk system kan beskrives ved differentialligningen

$$4x''(t) + 8x'(t) + 5x(t) = a\delta\left(t - t_0\right)$$

hvor det oplyses, at $t_0 > 0$. Begyndelsesbetingelserne er $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

Ved Laplacetransformation fås (idet X betegner den Laplacetransformerede af x):

$$4\left(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right) + 8\left(sX(s) - x(0)\right) + 5X(s) = ae^{-st_0}$$

Heraf finder vi

$$X(s) = \frac{4 + ae^{-st_0}}{4s^2 + 8s + 5} = \frac{4 + ae^{-st_0}}{4\left((s+1)^2 + \frac{1}{4}\right)}.$$

Ved opslag i tabel finder vi

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a}{2}\left[e^{-t}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right]_{\text{forsinket } t_0} \\ &= 2e^{-t}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a}{2}u\left(t - t_0\right)e^{-(t-t_0)}\sin\left(\frac{1}{2}\left(t - t_0\right)\right) \end{aligned}$$

Hvis pendulet skal bringes til ro ved det givne spark, altså hvis $x(t) = 0$ for alle $t > t_0$, så fås ved at lade $t \to t_0+$ i udtrykket for $x(t)$, at $2\mathrm{e}^{-t_0}\sin\left(\frac{1}{2}t_0\right) = 0$. Altså $t_0 = 2p\pi$, $p \in N$ (da $t_0 > 0$). Hermed er løsningen for for $t > t_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a}{2}e^{-(t-2p\pi)}\sin\left(\frac{1}{2}\left(t - 2p\pi\right)\right) \\ &= e^{-t}\left(2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a}{2}e^{2p\pi}\sin\left(\frac{1}{2}t - p\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Vi ser, at

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ for } t > 2p\pi \iff 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a}{2}e^{2p\pi}\sin\left(\frac{1}{2}t - p\pi\right) = 0 \text{ for } t > 2p\pi \\ &\iff 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a}{2}e^{2p\pi}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)(-1)^p = 0 \text{ for } t > 2p\pi \\ &\iff 2 + \frac{a}{2}e^{2p\pi}(-1)^p = 0 \iff a = 4e^{-2p\pi}(-1)^{p+1} \end{aligned}$$

Ikke uventet ses, at jo længere man venter (større p) jo mindre skal sparket a være i numerisk værdi. Dette skyldes, at luftmodstanden gør udsvingene mindre og mindre.