MAT 91122 Opgave E18

Preben Alsholm

13/5 1998

Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = \left(y - x^2\right)^2 - y^4$$

Stationære punkter skal bestemmes. Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4x\left(y - x^2\right) \\ f_y(x,y) &= 2\left(y - x^2\right) - 4y^3 \end{aligned}$$

Vi ser derfor, at

$$\begin{aligned} \nabla f(0,0) &= (0,0) \iff \left(x = 0 \vee y = x^2\right) \wedge 2\left(y - x^2\right) - 4y^3 = 0 \\ &\iff (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee (x,y) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

De stationære punkter er altså

$$(0,0)\,, \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ og } \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vi skal nu afgøre typen af de to sidste. Vi finder

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -4y + 12x^2 \\ f_{yy}(x,y) &= 2 - 12y^2 \\ f_{xy}(x,y) &= -4x \end{aligned}$$

Dermed har vi, at $f_{xx}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}, f_{yy}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4$ og $f_{xy}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$. Altså er $\left(f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}\right)\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0^2 - \left(-2\sqrt{2}\right)(-4) = -8\sqrt{2} < 0$, således at $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ er et egentligt lokalt ekstremum. Det er et maksimumspunkt, da $f_{xx}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$. Tilsvarende fås at $f_{xx}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}, f_{yy}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4$ og $f_{xy}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$. Altså er $\left(f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}\right)\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0^2 - 2\sqrt{2}\,(-4) = 8\sqrt{2} > 0$, således at $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ er et saddelpunkt.

Prøves samme kriterium på det stationære punkt $(0,0)$, finder man, at $\left(f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}\right)(0,0) = 0$. Dette afslører intet! Men vi har, at

$$\begin{aligned} f\left(x, x^2\right) &= -x^8 \\ f(x,0) &= x^4 \end{aligned}$$

begge gældende for alle $x \in R$. Heraf ses, at f ikke kan have hverken maksimum eller minimum i $(0,0)$.

Vi kan også vise, at $(0,0)$ ikke er et saddelpunkt efter den definition på saddelpunkt, som vi bruger. Vi har nemlig på en linie gennem $(0,0)$ i retningen (a,b), at

$$f(at,bt) = \left(bt - a^2t^2\right)^2 - b^4t^4 = t^2\left(b^2 - 2tba^2 + t^2a^4 - t^2b^4\right)$$

Hvis $b \neq 0$, ses, at udtrykket er positivt for alle små værdier af t. Hvis $b = 0$, så må $a \neq 0$ og vi får $f(at,bt) = t^4a^4$, der er positivt for alle værdier af t ($\neq 0$). Det følger, at f har egentligt lokalt minimum langs enhver ret linie gennem $(0,0)$. Atså er $(0,0)$ heller ikke et saddelpunkt.