MAT 91122 Opgave E19

Preben Alsholm

13/5 1998

Der er givet vektorfeltet

$$\overline{F}(x,y) = \left(y^3 + \sinh x, 3xy^2 + xy\right)$$

Vi skal først vise, at $\overline{F}$ ikke er konservativt i R^2. Vi krydsdifferentierer

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3y^2 \text{ og } \frac{\partial F_2}{\partial x} = 3y^2 + y$$

Disse afledede er åbenbart ikke identiske. Altså er $\overline{F}$ ikke konservativt i R^2.

Kurveintegralet udregnes v.hj.a. Greens sætning. Vi lader S betegne området indenfor kurven k. Så finder vi

$$\begin{aligned}
\int_k \overline{F} \cdot d\overline{r} &= \iint_S \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA \\
&= \iint_S \left(-3y^2 + 3y^2 + y\right) dA = \iint_S y dA
\end{aligned}$$

Det er en glimrende idé at udregne planintegralet i polære koordinater. Vi finder

$$\begin{aligned}
\iint_S y dA &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta \int_1^{2\sin\theta} r\sin\theta \cdot r dr \\
&= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta \int_1^{2\sin\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[r^3\right]_1^{2\sin\theta} \sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(8\sin^3\theta - 1\right)\sin\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(8\sin^4\theta - \sin\theta\right) d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^4\theta d\theta - \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin\theta d\theta \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{7}{32}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

En Maple-kommando kan eventuelt komme ind allerede ved planintegralet, som følger:

```
int( int( r^2*sin(t), r=1..2*sin(t) ), t=Pi/6..5*Pi/6);
```

En Maple-kommando kan også komme ind senere som her:

```
1/3*int(8*sin(t)^4-sin(t),t=Pi/6..5*Pi/6 );
```