MAT 91122 Opgave E20

Preben Alsholm

13/5 1998

Der er givet to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} 2x + y + \ln\left(x + y^2\right) &= 0 \\ 3x^2 - y^4 + \sin\left(\pi\left(x + y\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Vi skal ved Newtons metode bestemme en tilnærmelse til den løsning, der ligger i nærheden af punktet $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Vi finder, når $f(x, y)$ og $g(x, y)$ betegner venstresiderne af de to ligninger, at vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Med $(x_0, y_0) = (0, 1)$ skal vi bruge følgende størrelser

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1, g(0,1) = -1 \\ f_x(x,y) &= 2 + \frac{1}{x + y^2}, \text{ så } f_x(0,1) = 3 \\ f_y(x,y) &= 1 + \frac{2y}{x + y^2}, \text{ så } f_y(0,1) = 3 \\ g_x(x,y) &= 6x + \pi\cos\left(\pi\left(x + y\right)\right), \text{ så } g_x(0,1) = -\pi \\ g_y(x,y) &= -4y^3 + \pi\cos\left(\pi\left(x + y\right)\right), \text{ så } g_y(0,1) = -4 - \pi \end{aligned}$$

Ligningssystemet er altså konkret

$$\begin{aligned} 1 + 3x + 3(y - 1) &= 0 \\ -1 - \pi x - (4 + \pi)(y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dette ligningssystem kan også skrives

$$\begin{aligned} 3x + 3(y - 1) &= -1 \\ \pi x + (4 + \pi)(y - 1) &= -1 \end{aligned}$$

Løsningen er

$$(x, y) = (x_1, y_1) = \left(-\frac{1 + \pi}{12}, \frac{9 + \pi}{12}\right) = (-0.34513, 1.0118)$$

Vi får i opgaven besked på ikke at gå videre. Dette er naturligvis blot for at gøre opgaven kort. Man bør afgjort iterere mindst én gang mere. Løsningen findes ved fortsat iteration at være $(-0.39296, 1.0703)$ med 5 betydende cifre.