MAT 91122 Opgave E22

Preben Alsholm

9/12 1998

Der er givet kurveintegralet

$$\int_k \left(2x\sin y - \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx + \left(x^2\cos y + \frac{1}{1+y}\right) dy$$

hvor k er kurven givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y) = (\sin t, 2\cos t)\,, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Vi viser, at differentialformen

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy = \left(2x\sin y - \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx + \left(x^2\cos y + \frac{1}{1+y}\right) dy$$

er eksakt i området $S = \{(x, y)\,|x > -1 \wedge y > -1\}$. Da vi har

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x\cos y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

overalt i det åbne enkeltsammenhængende område S, er ω eksakt i S. Kurveintegralet er derfor uafhængigt af vejen fra startpunktet $(0, 2)$ til slutpunktet $(1, 0)$. Vælger vi at gå først ned langs y-aksen til $(0, 0)$, dernæst langs x-aksen til $(1, 0)$, fås

$$\int_k \omega = -\int_0^2 \frac{1}{1+t} dt + \int_0^1 -\frac{1}{(1+t)^2} dt = -\ln 3 - \frac{1}{2}$$

Alternativt kan en stamfunktion f til differentialformen bestemmes: Da $f_x(x, y) = 2x\sin y - \frac{1}{(1+x)^2}$ fås

$$f(x, y) = x^2\sin y + \frac{1}{1+x} + h(y)$$

Heraf fås

$$f_y(x, y) = x^2\cos y + h'(y)$$

Men da $f_y(x, y) = F_2(x, y) = x^2\cos y + \frac{1}{1+y}$, fås altså $h'(y) = \frac{1}{1+y}$, hvormed vi har $h(y) = \ln(1+y) + C$. Altså er samtlige stamfunktioner givet ved

$$f(x, y) = x^2\sin y + \frac{1}{1+x} + \ln(1+y) + C$$

hvor C er en arbitrær konstant. Hermed findes

$$\int_k \omega = f(1, 0) - f(0, 2) = -\ln 3 - \frac{1}{2}$$