

MAT 91122 Opgave E27

Preben Alsholm

9/12 1998

Vi skal skrive dobbeltintegralet

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} dx \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} x^2 \sin(x^2 + y^2) dy$$

som et planintegral

$$\iint_S x^2 \sin(x^2 + y^2) dA$$

over et passende valgt område S .

1. Et sådant område er cirkelskiven $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi\}$. Vi udelader skitsen.

2. Vi udregner planintegralet i polære koordinater. Vi finder

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 \sin(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} (r \cos \theta)^2 \sin(r^2) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r^3 \cos^2 \theta \sin(r^2) dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 \end{aligned}$$

hvor vi i integralet over r har benyttet substitutionen $t = r^2$, så $dt = 2r dr$.