MAT 91121-22 Opgave E35

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Massebalance:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(4x\left(t\right)\right) &= a+2y\left(t\right)-3x\left(t\right)\\ \frac{d}{dt}\left(2y\left(t\right)\right) &= b-2y\left(t\right)+u\left(t-5\right)x\left(t-5\right)\end{aligned}$$

Her betegner u Heavisides funktion. Ved Laplacetransformation fås

$$\begin{aligned}4s\overline{x}\left(s\right)-4x\left(0\right) &= \frac{a}{s}+2\overline{y}\left(s\right)-3\overline{x}\left(s\right)\\ 2s\overline{y}\left(s\right)-2y\left(0\right) &= \frac{b}{s}-2\overline{y}\left(s\right)+e^{-5s}\overline{x}\left(s\right)\end{aligned}$$

Da $x\left(0\right)=0$ og $y\left(0\right)=0$ fås efter omordning

$$\begin{aligned}\left(4s+3\right)\overline{x}\left(s\right)-2\overline{y}\left(s\right) &= \frac{a}{s}\\ -e^{-5s}\overline{x}\left(s\right)+2\left(s+1\right)\overline{y}\left(s\right) &= \frac{b}{s}\end{aligned}$$

Ved brug af Cramers regel (determinantmetoden) finder vi

$$\overline{y}\left(s\right)=\frac{\begin{vmatrix}4s+3 & \frac{a}{s}\\ -e^{-5s} & \frac{b}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4s+3 & -2\\ -e^{-5s} & 2\left(s+1\right)\end{vmatrix}}=\frac{\left(4s+3\right)\frac{b}{s}+e^{-5s}\frac{a}{s}}{\left(4s+3\right)2\left(s+1\right)-2e^{-5s}}$$

Det oplyses, at $\lim_{t\to\infty}y\left(t\right)$ eksisterer. Vi benytter slutværdireglen:

$$\lim_{s\to 0+}s\overline{y}\left(s\right)=\lim_{s\to 0+}\frac{\left(4s+3\right)b+e^{-5s}a}{\left(4s+3\right)2\left(s+1\right)-2e^{-5s}}=\frac{3b+a}{4}$$

Resultatet kan også bestemmes ved i massebalanceligningerne at løse de ligninger, der opnås ved at sætte $x'=y'=0$ og erstatte $x\left(t\right),y\left(t\right)$ og $x\left(t-5\right)$ med x,y og x, henholdsvis.