MAT 91122 Opgave E37

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Differentialformen $F_1dx + F_2dy$ er givet ved

$$\left(3x^2y^2 + 4y^2 + 2y + 5\right) dx + \left(2x^3y + 8xy + 2x\right) dy$$

Vi skal først vise, at den er eksakt i R^2. Vi finder

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6x^2y + 8y + 2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

overalt i R^2. Da F_1 og F_2 har kontinuerte partielle afledede af første orden i den enkeltsammenhængende og åbne mængde R^2 og da $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i R^2 konkluderer vi, at $F_1dx + F_2dy$ er eksakt i R^2.

Vi skal nu finde samtlige stamfunktioner for F_1dx+F_2dy. Enhver stamfunktion f skal opfylde

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= F_1 = 3x^2y^2 + 4y^2 + 2y + 5 \\ f_y(x,y) &= F_2 = 2x^3y + 8xy + 2x \end{aligned}$$

Af den første betingelse fås ved integration mht. x

$$f(x,y) = x^3y^2 + 4xy^2 + 2xy + 5x + h(y)$$

hvor h indtil videre er ukendt. Ved differentiation af det fremkomne resultat mht. y fås

$$f_y(x,y) = 2x^3y + 8xy + 2x + h'(y)$$

Ved at sammenholde dette med kravet $f_y(x,y) = F_2 = 2x^3y + 8xy + 2x$ fås, at $h'(y) = 0$, altså $h(y) = C$, hvor C er en konstant. Samtlige stamfunktioner er dermed givet ved formlen

$$f(x,y) = x^3y^2 + 4xy^2 + 2xy + 5x + C$$

hvor $C \in R$.

Til slut skal vi finde kurveintegralet

$$\int_k F_1dx + F_2dy$$

hvor k kurven er givet ved parameterfremstillingen

$$(x,y) = \left(\sqrt{1 + 8\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}, \ln\left(1 - t + te^t\right)\right), \quad t \in [0,1]$$

Kurvens endepunkter er start $= (3,0)$ og slut $= (1,1)$. Ved brug af en stamfunktion fås

$$\int_k F_1 dx + F_2 dy = f(1,1) - f(3,0) = 12 - 15 = -3$$