MAT 91122 Opgave E40

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = 2x^2y^2 - 2x^2 - y^4$$

i kvadratet

$$S = \left\{(x,y) \in R^2 \,|{-2} \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2\right\}$$

Vi skal bestemme samtlige stationære punkter for f i det indre af S og største- og mindsteværdi på S.

Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4xy^2 - 4x = 4x\left(y^2 - 1\right) \\ f_y(x,y) &= 4x^2y - 4y^3 = 4y\left(x^2 - y^2\right) \end{aligned}$$

Altså

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = \pm 1) \wedge (y = 0 \vee y = \pm x) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (1,\pm 1) \vee (x,y) = (-1,\pm 1) \end{aligned}$$

Vi har altså fundet 5 stationære punkter, $(0,0), (1,\pm 1)$ og $(-1,\pm 1)$. De ligger åbenbart alle i kvadratet S.

Randundersøgelsen består af fire dele svarende til hver sin side i kvadratet. Da der imidlertid kun forekommer lige eksponenter i f, kan siderne slås sammen parvis:

Randdelen $x = \pm 2,\ \ y \in [-2,2]$. Vi finder

$$f(\pm 2, y) = 8y^2 - 8 - y^4 = g(y)$$

Da $g'(y) = 16y - 4y^3 = 4y\left(4 - y^2\right)$, fås $g'(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \vee y = \pm 2$. En fortegnsundersøgelse viser, at mindsteværdien for g er $g(0) = -8$. Størsteværdien antages i endepunkterne $y = \pm 2$, og den er $g(\pm 2) = 8$.

Randdelen $y = \pm 2,\ \ x \in [-2,2]$. Vi finder

$$f(x, \pm 2) = 6x^2 - 16$$

Dette udtryk har åbenbart mindsteværdi for $x = 0$, og den er -16. Størsteværdien antages for $x = \pm 2$, og den er 8.

Sammenfattende er størsteværdien på randen som helhed 8 og mindsteværdien er -16. Disse værdier skal nu sammenlignes med funktionsværdierne i de stationære punkter

$$f(0,0) = 0, f(1,\pm 1) = f(-1,\pm 1) = -1$$

Vi konkluderer, at størsteværdien for f på S er 8, og mindsteværdien er -16.