

MAT 91122 Opgave E43

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Dobbeltintegralet

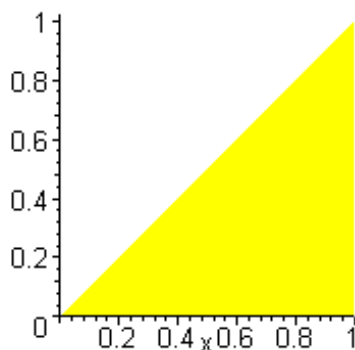
$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y}{1+x^3} dx$$

udregnes kun meget vanskeligt direkte, da

$$\int \frac{1}{1+x^3} dx$$

er ret ubehagelig (Prøv selv i Maple). Dobbeltintegralet kan imidlertid opfattes som et planintegral over et område S i xy -planen. Vi skal udregne dette planintegral ved først at skrive det som et dobbeltintegral med omvendt integrationsorden.

Området S er vist på tegningen:



Området kan også beskrives ved $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$. Altså finder vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y}{1+x^3} dx &= \int_S \frac{y}{1+x^3} dA = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{y}{1+x^3} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} [y^2]_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx \\ &= \frac{1}{6} [\ln(1+x^3)]_0^1 = \frac{1}{6} \ln 2 \end{aligned}$$