MAT 91122 Opgave E45

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = xy^2 - x^3 + x^2 - y^2$$

for alle $(x,y) \in R^2$. På figuren er til orientering vist et niveaukurvediagram for f.

1. Vi skal finde de 4 stationære punkter.

   Vi finder de partielle afledede af f.

   $$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y^2 - 3x^2 + 2x \\ f_y(x,y) &= 2xy - 2y = 2y(x-1) \end{aligned}$$

   Hermed kan de staionære punkter bestemmes:

   $$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Longleftrightarrow y^2 - 3x^2 + 2x = 0 \wedge (y = 0 \vee x = 1) \\ &\Longleftrightarrow \left(-3x^2 + 2x = 0 \wedge y = 0\right) \vee \left(y^2 - 1 = 0 \wedge x = 1\right) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) \vee (x,y) = (1, \pm 1) \end{aligned}$$

   De stationære punkter er altså $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ og $(1, \pm 1)$.

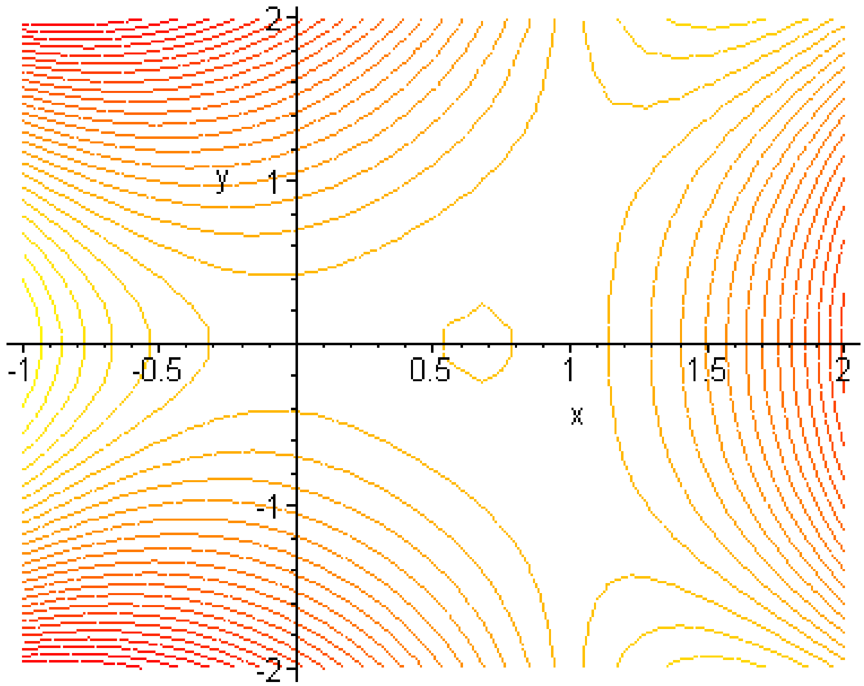
2. Ud fra niveaukurvediagrammet kan vi gætte på, at punkterne $(0,0)$ og $(1, \pm 1)$ er saddelpunkter. Vi undersøger derfor det stationære punkt $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Vi finder

   $$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -6x + 2 \\ f_{xy}(x,y) &= 2y \\ f_{yy}(x,y) &= 2x - 2 \end{aligned}$$

   Altså findes $f_{xx}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -2$, $f_{xy}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 0$, $f_{yy}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{2}{3}$. Hermed har vi, at Hesse-matricen er

   $$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   altså en diagonalmatrix. Egenværdierne står altså i diagonale. Begge er negative, så punktet $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ er et egentligt lokalt maksimum.



3. Vi skal nu finde største- og mindsteværdi for f på det begrænsede område S, der er beliggende mellem hyperbelgrenene givet ved $y^2 - x^2 = 1$ samt mellem linierne givet ved $x = 0$ og $x = 1$. Området er vist på figuren.nedenfor.

   Af de stationære punkter ligger kun $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ i det indre. De øvrige stationære punkter er iøvrigt saddelpunkter, så de ville alligevel intet betyde i denne sammenhæng.

   På hyperbelgrenene $y^2 - x^2 = 1$ har vi

$$f(x, y) = x - 1$$

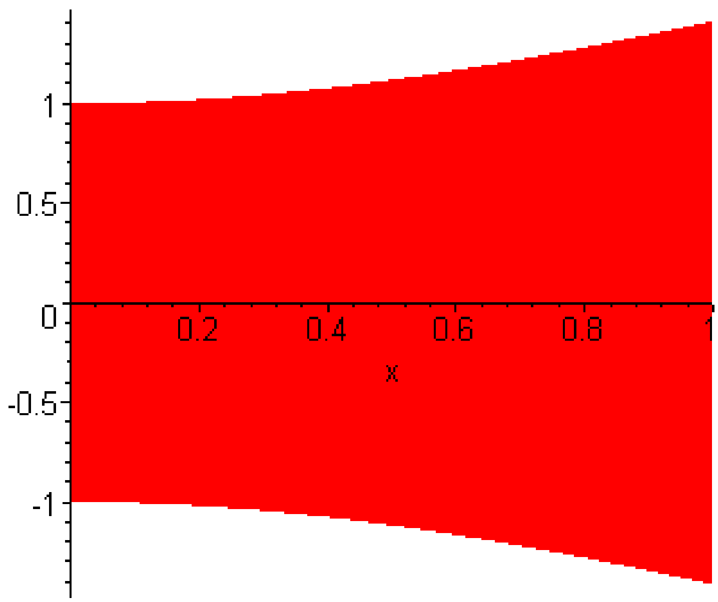
   Da $x \in [0, 1]$, ses, at størsteværdien på denne randdel er 0, og mindsteværdien er -1. På liniestykket $x = 0, y \in [-1, 1]$ har vi

$$f(0, y) = -y^2$$

   der åbenbart har størsteværdi 0 og mindsteværdi -1. På liniestykket $x = 1, y \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ har vi $f(1, y) = 0$. Vi konkluderer, at størsteværdien på randen af S er 0 og mindsteværdien er -1. I det stationære punkt finder vi

$$f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{27}$$

   Altså er størsteværdien for f på S lig med $\frac{4}{27}$ og mindsteværdien er -1.


1
0.5
0
-0.5
-1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x