

MAT 91122 Opgave E46

Preben Alsholm
IFAK, DTU

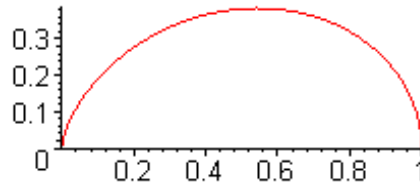
21. november 2003

Vi skal finde kurveintegralet

$$\int_k (x \sinh x + 3xy^2) dx + (\ln(2+y) + 7y^3) dy$$

når k er den lukkede kurve, der er sammensat af kurven k_1 givet i polære koordinater ved $r = \cos^2 \theta$ med $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ og det stykke af x-aksen, der forbinder endepunkterne af k_1 . Kurven gennemløbes i positiv omløbsretning. Vi skal bruge Greens sætning.

Kurven ses således ud:



Vi finder ved Greens sætning

$$\int_k (x \sinh x + 3xy^2) dx + (\ln(2+y) + 7y^3) dy = \int_S -6xy \, dA$$

når S er området indenfor kurven. Planintegralet udregnes i polære koordinater:

$$\begin{aligned}\int_S -6xy \, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos^2 \theta} -6r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \\ &= -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r^4]_0^{\cos^2 \theta} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{3}{20} [\cos^{10} \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{20}\end{aligned}$$