MAT 91122 Opgave E47

Preben Alsholm
IFAK, DTU

21. november 2003

Funktionen f er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} t & for \quad t < 1 \\ 1 & for \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Vi skal først finde den Laplacetransformerede af f ved integration direkte ud fra definitionen $\overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$. Vi finder

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^\infty e^{-st}dt \\ &= \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt + \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_1^\infty \\ &= -\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^1 + \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s}\right) \end{aligned}$$

gældende for $s > 0$.

Vi skal også finde den Laplacetransformerede af f ved brug af forsinkelsesreglen efter omskrivning af $f(t)$ til en sum indeholdende Heaviside-udtryk $u(t-a)$. Vi finder

$$f(t) = t + u(t-1)(-t+1)$$

hvoraf fås

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &= \frac{1}{s^2} + e^{-s}L\{t \longmapsto -(t+1)+1\}(s) = \frac{1}{s^2} + e^{-s}L\{t \longmapsto -t\}(s) \\ &= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s}\right) \end{aligned}$$