MAT 91122 Opgave E55

Preben Alsholm

Januar 2001

Der er givet differentialligningen

$$2x''(t) + 7x'(t) + 5x(t) = 15u(t-3) + 6\delta(t-3)$$

med begyndelsesbetingelserne $x(0) = 3$ og $x'(0) = -3$. Her er u Heavisides funktion, og δ er Diracs deltafunktion.

1. Vi skal finde den Laplacetransformerede af løsningen. Ved Laplacetransformation af differentialligningen fås

$$2\left(s^2\overline{x}(s) - sx(0) - x'(0)\right) + 7\left(s\overline{x}(s) - x(0)\right) + 5\overline{x}(s) = 15e^{-3s}\frac{1}{s} + 6e^{-3s}$$

   Med de givne begyndelsesbetingelser får vi efter omordning

$$\left(2s^2 + 7s + 5\right)\overline{x}(s) = 6s + 15 + 15e^{-3s}\frac{1}{s} + 6e^{-3s}$$

   Hermed har vi

$$\begin{aligned}\overline{x}(s) &= \frac{6s+15}{2s^2+7s+5} + \frac{15e^{-3s}\frac{1}{s} + 6e^{-3s}}{2s^2+7s+5} \\ &= \frac{3(2s+5)}{(2s+5)(s+1)} + \frac{3e^{-3s}(2s+5)}{s(2s+5)(s+1)} \\ &= \frac{3}{s+1} + \frac{3e^{-3s}}{s(s+1)} = 3\frac{s+e^{-3s}}{s(s+1)}\end{aligned}$$

   for alle $s > 0$.

2. Idet det forventes, at $\lim_{t\to\infty} x(t)$ eksisterer, skal vi uden tilbagetransformation finde denne grænseværdi. Grænseværdien kan findes v.hj.a. slutværdireglen:

$$s\overline{x}(s) = 3\frac{s+e^{-3s}}{s+1} \to 3$$

   for $s \downarrow 0$. Altså fås grænseværdien til $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$.

3. Vi skal nu tilbagetransformere $\overline{x}(s)$ .Vi finder

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\left(3\frac{s+e^{-3s}}{s(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{3}{s+1} + 3\frac{e^{-3s}}{s(s+1)}\right) \\ &= 3e^{-t} + \left[3\left(1-e^{-t}\right)\right]_{\text{forsinket } 3} = 3e^{-t} + 3u(t-3)\left(1-e^{-(t-3)}\right) \\ &= \begin{cases} 3e^{-t} & for \quad t<3 \\ 3e^{-t} + 3\left(1-e^{-(t-3)}\right) & for \quad t \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$