Cesaro-summabilitet

Preben Alsholm

4. november 2006

Definition 1 *Lad afsnittene for rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være* $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$, *hvor altså* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *for* $N \geq 1$. *Dan gennemsnittene*

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \\ t_3 &= \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) \\ &\vdots \\ t_N &= \frac{1}{N}(s_1 + s_2 + \ldots + s_N) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hvis talfølgen $(t_N)_{N=1}^{\infty}$ *er konvergent med grænseværdien* t, *altså hvis* $\lim_{N\to\infty} t_N = t$, *så siges rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *at være Cesaro-summabel (C1) med sum* t.

Sætning 2 *Hvis rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent med sum* s, *så er rækken Cesaro-summabel med sum* s.

Bevis. *Antag, at* $s_n \to s$ *for* $n \to \infty$. *Vi skal vise, at* $t_n \to s$ *for* $n \to \infty$.
Lad da $\varepsilon > 0$ *være givet. Bestem* p, *så* $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ *for* $n > p$.
Vi har da for alle $N > 0$:

$$\begin{aligned} |s - t_{N+p}| &= \frac{1}{N+p}\left|(N+p)\,s - (s_1 + s_2 + \ldots + s_p) - (s_{p+1} + s_{p+2} + \ldots + s_{N+p})\right| \\ &\leq \frac{1}{N+p}\left|ps - (s_1 + s_2 + \ldots + s_p)\right| + \frac{1}{N+p}\left|Ns - (s_{p+1} + s_{p+2} + \ldots + s_{N+p})\right| \end{aligned}$$

Andet led:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+p}\left|Ns - (s_{p+1} + s_{p+2} + \ldots + s_{N+p})\right| &\leq \frac{1}{N+p}\left(|s - s_{p+1}| + |s - s_{p+2}| + \ldots + |s - s_{N+p}|\right) \\ &< \frac{1}{N+p}\frac{\varepsilon}{2}N < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Vælg nu q *så for alle* $N > q$:

$$\frac{1}{N+p}\left|ps - (s_1 + s_2 + \ldots + s_p)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Så har vi åbenbart $|s - t_{N+p}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ *for alle* $N > q$, *dvs.* $|s - t_n| < \varepsilon$ *for alle* $n > p + q$. ■

Bemærkning 3 *Det omvendte gælder ikke.* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ *er som bekendt divergent, men den er Cesaro-summabel med sum* $\frac{1}{2}$*, som vi nu skal vise.*

Eksempel 4 *Betragt den divergente række*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

Vi har $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$*. Generelt* $s_{2k} = 0$ *og* $s_{2k-1} = 1$ *for alle* $k \geq 1$*. Derfor fås*

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 = 1 \\ t_2 &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2} \\ t_3 &= \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{2}{3} \\ t_4 &= \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Generelt

$$\begin{aligned} t_{2k} &= \frac{1}{2k}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k}) = \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2} \\ t_{2k-1} &= \frac{1}{2k-1}(s_1 + s_2 + \ldots + s_{2k-1}) = \frac{1}{2k-1}k = \frac{k}{2k-1} \end{aligned}$$

´således at $t_n \to \frac{1}{2}$ *for* $n \to \infty$*. Rækken er altså Cesaro-summabel med sum* $\frac{1}{2}$*.*

Sætning 5 *Hvis en række har udelukkende positive led (i det mindste fra et vist trin) , så er den konvergent, hvis og kun hvis den er Cesaro-summabel.*

Bevis. *Antag, at* $a_n > 0$ *for alle* $n \geq 1$ *og antag, at rækken er divergent. Så har vi åbenbart, at* $s_n \to \infty$ *for* $n \to \infty$*.*
Vi har nu

$$\begin{aligned} t_{2n} &= \frac{1}{2n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + \frac{1}{2n}(s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots + s_{2n}) \\ &\geq \frac{1}{2n}(s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots + s_{2n}) \geq \frac{1}{2n}ns_{n+1} = \frac{1}{2}s_{n+1} \end{aligned}$$

Heraf følger, at rækken ikke er Cesaro-summabel. Er omvendt rækken konvergent følger det af Sætning (2) , at rækken er Cesaro-summabel. ■

Sætning 6 *Hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er Cesaro-summabel, så gælder*

$$\frac{a_n}{n} \to 0 \text{ og } \frac{s_n}{n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Bevis. *Antag, at Cesaro-følgen er konvergent:* $t_n \to t$ *for* $n \to \infty$*. Vi har*

$$s_n = nt_n - (n-1)\,t_{n-1}$$

så

$$\frac{s_n}{n} = t_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_{n-1} \to t - t = 0 \text{ for } n \to \infty$$

Da vi også har $a_n = s_n - s_{n-1}$ *fås*

$$\frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{s_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{s_{n-1}}{n-1}$$

Af det lige viste resultat om $\frac{s_n}{n}$ *følger så, at også* $\frac{a_n}{n} \to 0$ *for* $n \to \infty$*.* ■

Sætning 7 *(*Littlewood's sætning*) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er Cesaro-summabel og hvis talfølgen $(na_n)_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.*
Bevis. *Beviset er ikke simpelt, så det springer vi over.* ■

Sætning 8 *(*Fejér's sætning*) Lad funktionen f være periodisk med periode 2π og integrabel på $[-\pi, \pi]$. Antag, at der for x_0 gælder, at grænseværdien*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\left(f\left(x_0+t\right)+f\left(x_0-t\right)\right)$$

eksisterer. Så er Fourierrækken for f Cesaro-summabel for $x = x_0$ med grænseværdien som sum.
Bevis. *Et nydeligt bevis er givet i Konrad Knopp,* Theory and Application of Infinite Series, *Dover Publications 1990, side 493-497.* ■

Korollar 9 *Hvis funktionen f er periodisk med periode 2π og kontinuert, så er dens Fourier-række*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

uniformt Cesaro-summabel med sum $f(x)$ for $x \in R$.

Bemærkning 10 *En periodisk og kontinuert funktion f kan have en Fourierrække, der er divergent i visse punkter, men Fourierrækken er altså Cesaro-summabel for alle $x \in R$!*

Eksempel 11 *Betragt den divergente række*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)$$

Vi vil vise, at rækken er Cesaro-summabel og at summen er $\frac{1}{2}$ for alle $x \neq p2\pi$.
Vi har for $x \neq p2\pi$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} e^{inx} &= \frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{1}{2}Nx}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}(N+1)x}-e^{\frac{1}{2}(N+1)x}}{e^{-\frac{1}{2}ix}-e^{\frac{1}{2}ix}} \\ &= e^{i\frac{1}{2}Nx}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\end{aligned} \tag{1}$$

a $\cos nx = \operatorname{Re} e^{inx}$ fås derfor

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=0}^{N}\cos(nx) = \cos\left(\frac{1}{2}Nx\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at

$$\cos\left(\frac{1}{2}Nx\right)\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

Vi har så for Cesaro-gennemsnittet t_N

$$\begin{aligned} t_N &= \frac{1}{N+1}\left(s_0+s_1+\ldots+s_N\right) \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{N+1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right) \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{2}+\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right) \end{aligned}$$

Men af den komplekse udregning (1) ovenfor fås

$$\sum_{n=0}^{N} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} = e^{i\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = e^{i\frac{1}{2}(N+1)x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(N+1\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \tag{2}$$

altså har vi

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(N+1\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)^2$$

hvormed

$$t_N = \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(N+1\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)^2\right)$$

hvoraf det klart fremgår, at $t_N \to \frac{1}{2}$ for $N \to \infty$.

Eksempel 12 *Betragt rækken*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(nx\right)$$

Rækken er kun konvergent for $x = p\pi, p \in Z$ og har jo da summen 0. Vi vil vise, at rækken er Cesaro-summabel for alle $x \in R$, og at summen er $\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x\right)$ for alle $x \neq p2\pi$. r jo k
Af den komplekse udregning (1) ovenfor fås for alle $x \neq p2\pi$ da $\sin nx = \operatorname{Im} e^{inx}$ fås derfor

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(nx\right) = \sin\left(\frac{1}{2}Nx\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(N+1\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Vi har så for Cesaro-gennemsnittet t_N

$$\begin{aligned} t_N &= \frac{1}{N}\left(s_1+s_2+\ldots+s_N\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{2}nx\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(n+1\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \\ &= \frac{1}{2N\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\sum_{n=1}^{N}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2N\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at

$$\sin\left(\frac{1}{2}nx\right)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

Men af (2) ovenfor fås

$$\sum_{n=0}^{N}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}=e^{i\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{N}e^{inx}=e^{i\frac{1}{2}(N+1)x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

altså har vi

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}=\frac{\sin\left((N+1)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

hvormed

$$t_N=\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4N}\frac{\sin\left((N+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

hvoraf det klart fremgår, at $t_N\to\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x\right)$ *for* $N\to\infty$*.*

Bemærkning 13 *Ingen af rækkerne* $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(nx)$ *og* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ *kan være Fourierrække for en integrabel funktion, da der gælder følgende vigtige sætning.*

Sætning 14 *(*Riemann-Lebesgue's lemma*) Hvis* f *er integrabel på* $[-\pi,\pi]$*, så gælder*

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx &\quad\to\quad 0 \text{ for } n\to\infty\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx &\quad\to\quad 0 \text{ for } n\to\infty\end{aligned}$$